MIRON NICOLESCU

FUNCȚII REALE ȘI ELEMENTE DE TOPOLOGIE

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

Acad. MIRON NICOLESCU

FUNCȚII REALE ȘI ELEMENTE DE TOPOLOGIE

EDIȚIA A DOUA

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI, 1968

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Formal, această carte apare ca „ediția a doua" a cărții *Funcții reale și elemente de analiză funcțională*, apărută în 1962. În fapt, este vorba de o ediție *nouă*, atît prin titlul său, ușor modificat, cît mai ales prin conținut. Dacă osatura generală a cursului a rămas neschimbată, pentru a se conforma actualei programe, conținutul a fost sensibil remaniat și lărgit.

Rolul unui astfel de curs în programul facultăților de matematică și mecanică este, în primul rînd, acela de a reordona și de a sintetiza materialul învățat la cursul de analiză matematică, prin aprofundarea unor noțiuni de capitală importanță, ca acelea de funcțiune, de continuitate, de integrală, și situarea lor în cadrul cel mai larg posibil, compatibil cu nivelul de cunoștințe atins în al treilea an de studiu. Dar, pe de altă parte, același curs trebuie să deschidă ferestrele spre cursurile speciale ale ultimilor ani, să constituie o bună și succintă introducere în aprofundarea cu folos a acestora. Remanierea și lărgirea conținutului a aproape tuturor capitolelor cursului sînt tocmai rezultatul discuțiilor informative pe care le-am purtat cu colegii mei care predau cursuri speciale.

Ca urmare, capitolul I apare complet refăcut, punîndu-se la bază noțiunea de relație (binară) din care noțiunea de funcție derivă imediat.

Capitolul II, consacrat unei expuneri sintetice de topologie generală, a fost considerabil îmbogățit, prin adăugarea studiului consacrat spațiilor topologice regulate și spațiilor normale, cu teoremele corespunzătoare ale lui Urîson.

Teorema de prelungire a lui Tietze, expusă anterior pentru spațiile metrice, își găsește locul său firesc în cadrul spațiilor normale. În consecință, capitolul III, consacrat spațiilor metrice, apare mai comprimat. În schimb, capitolele IV și V capătă o extensiune apreciabilă.

Astfel, în studiul spațiilor vectoriale normate s-au inclus teorema lui Steinhaus, studiul aplicațiilor închise și al proiecțiilor, studiul mulțimii rezolvante și al spectrului unui operator. Capitolul consacrat spațiilor hilbertiene, capitol nou (în vechea versiune figura ca un mic paragraf), conține teorema de existență a proiecțiilor, teorema de reprezentare a lui Riesz-Fréchet, un studiu destul de amănunțit al mulțimilor ortonormate, precum și un paragraf consacrat operatorilor adjuncți și autoadjuncți.

Am scris această nouă versiune din necesitatea stringentă a organizării în cele mai bune condiții a unui material cît mai adecvat studiului, la nivelul corespunzător, dar în același timp cu sentimentul adînc al zădărniciei oricărui efort de fixare pentru un timp mai îndelungat a peisajului actual în învățămîntul universitar. Sîntem prinși într-un puternic dinamism al dezvoltării, în care definitiv este numai progresul. Desigur că într-o viitoare versiune a acestui curs, unele dintre capitole (de exemplu, capitolele I, III și părți din celelalte capitole) își vor

Scanned with OKEN Scanner

găsi locul lor firesc în cursul de analiză al primilor doi ani, iar locul acestora va fi luat de capitole transferate din actualele cursuri speciale.

La redactarea acestui curs am primit numeroase sugestii şi un substanţial ajutor prin revederea manuscrisului, din partea foştilor mei elevi şi tineri colegi, astăzi cercetători cu nume bine cunoscut în mişcarea matematică, ca S. Marcus şi Ciprian Foiaş.

De asemenea, observaţiile făcute pe marginea primei versiuni de către un alt fost elev, A. Hristev, mi-au fost utile în înlăturarea unor lipsuri. Tuturor le exprim aici mulţumirile mele recunoscătoare.

M. N.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

MULȚIMI

§ 1. APARTENENȚĂ, INCLUZIUNE, EGALITATE

1.1.1. Vom considera ca dată noțiunea de mulțime.

Pentru a preciza că un obiect a face parte sau aparține unei mulțimi A, vom scrie $a \in A$.

Pentru orice element (obiect) c care *nu* aparține mulțimii A vom scrie $c \notin A$.

Vom spune că o mulțime A este o *parte* (sau: o *submulțime*) a mulțimii B, dacă

$$a \in A \Rightarrow a \in B.$$

Vom scrie, în acest caz, $A \subseteq B$ sau $B \supseteq A$. Vom citi deseori această scriere astfel: „Mulțimea A este *inclusă* în mulțimea B" sau: „Mulțimea B include mulțimea A."

Vom spune că două mulțimi A și B sînt *egale* dacă avem simultan implicațiile

$$a \in A \Rightarrow a \in B, \quad b \in B \Rightarrow b \in A,$$

adică dacă A și B au aceleași elemente.

Vom scrie, în acest caz, $A = B$ sau $B = A$. Dacă A și B *nu* sînt egale, vom scrie $A \neq B$, sau $B \neq A$.

Vom spune că mulțimea A este o parte *strictă*[1] a mulțimii B sau este inclusă strict în B și vom scrie $A \subset B$ (sau $B \supset A$) dacă

$$A \subseteq B \text{ și } A \neq B.$$

---

[1] Mulți autori scriu „$A \subset B$" în loc de „$A \subseteq B$". Acest mod de a scrie prezintă inconvenientul că inclusiunea *strictă* este scrisă de acești autori sub formă mai lungă: $A \subset B$, $A \neq B$.

1.1.2. În studiul introductiv pe care-l vom face vom pleca de la o anumită mulțime T, pe care nu este necesar să o precizăm. Pentru simplicitatea limbajului vom numi de cele mai multe ori o astfel de mulțime un *spațiu amorf* sau, simplu, un *spațiu*. Elementele (obiectele) acestei mulțimi vor fi frecvent numite *puncte*. Acest limbaj geometric ușurează de multe ori expunerea, în afară de faptul foarte important că poate sugera studiul anumitor probleme.

Vom nota cu litere mari ale alfabetului latin

$$A, B, C, \ldots, L, M, \ldots, X, \ldots$$

părți ale lui T.

Vom nota de asemenea cu $\mathfrak{L}(T)$ mulțimea (familia) părților lui T și cu litere majuscule ale alfabetului latin

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \ldots$$

părți ale mulțimii $\mathfrak{L}(T)$. Evident

$$A \subseteq T \Leftrightarrow A \in \mathfrak{L}(T).$$

Scrierile $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ sau $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ nu au nevoie de explicație suplimentară.

Să punem, pentru simplicitate, $\mathfrak{L}(T) = \mathfrak{T}$.

În unele probleme speciale vom fi conduși să luăm în considerare mulțimea părților lui $\mathfrak{T}$, pe care o vom scrie $\mathfrak{P}(\mathfrak{T})$. Vom nota cu majuscule ale alfabetului gotic

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$$

părți ale mulțimii $\mathfrak{P}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$.

Procesul indicat poate fi continuat. Pentru cursul nostru vor fi suficiente mulțimile $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}$, atașate spațiului T.

Considerațiile ce urmează privesc spațiul T, mulțimi și puncte din T. Dar ele se aplică, fără nici o schimbare, la mulțimea $\mathfrak{T}$, la părți și elemente ale acesteia etc.

1.1.3. O submulțime A a lui T poate fi dată fie dînd elementele sale, fie formulînd o proprietate pe care elementele acestei mulțimi, și numai aceste elemente, o posedă. Dacă, de exemplu, $P(x)$ este o propoziție exprimînd o proprietate a punctului $x \in T$, care este adevărată sau falsă, după alegerea lui x, vom putea defini mulțimea punctelor x pentru care $P(x)$ este adevărată. Vom scrie această mulțime astfel: $\{x : P(x)\}$. Dacă, de exemplu, T este planul complex, atunci mulțimea

$$\{x : |x| < 1\}$$

reprezintă discul de rază 1 cu centrul în origine.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă o mulțime este definită prin enumerarea elementelor sale: $a, b, c, \ldots$, vom scrie această mulțime astfel:

$$\{a, b, c, \ldots\}.$$

Cu această convenție grafică, simbolul $\{a\}$ are un sens precis: el reprezintă mulțimea care conține pe a ca singur element. Evident $a \in \{a\}$.

1.1.4. Să presupunem că $P(x)$ este afirmația "$x \neq x$". Această aserțiune nu este adevărată pentru nici un punct din T. Cu toate acestea, considerații de generalitate a formulării proprietăților din teoria mulțimilor ne conduc să acceptăm că $\{x : P(x)\}$ este și în acest caz o mulțime, anume *mulțimea vidă*. Vom nota această mulțime astfel: $\emptyset$. Ca o consecință a convenției făcute, avem $\emptyset \in \mathfrak{P}(T)$.

Teoremă. *Pentru orice mulțime A avem $\emptyset \subseteq A$.*

În adevăr,

$$\emptyset \subseteq A$$

înseamnă că

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A,$$

sau: *Orice* element din $\emptyset$ aparține lui A.

Să negăm această propoziție. Obținem:

Există un element $x \in \emptyset$ astfel încît $x \notin A$.

Dar această afirmație contrazice definiția mulțimii $\emptyset$. Așadar, propoziția enunțată este adevărată.

§ 2. OPERAȚII CU MULȚIMI

1.2.1. Dacă $A \subseteq T$, vom defini mulțimea $\complement A$ prin egalitatea

$$\complement A = \{t : t \notin A\}$$

și o vom numi *complementara* lui A.

Evident: 1° $\complement\complement A = A$; 2° $\complement T = \emptyset$; $\complement\emptyset = T$.

Teoremă. *Dacă $A \subseteq B$, atunci $\complement B \subseteq \complement A$.*

În adevăr, prin ipoteză

$$a \in A \Rightarrow a \in B.$$

Fie $b \in \complement B$. Aceasta înseamnă că $b \notin B$. Dacă $b \notin \complement A$, atunci $b \in A$, de unde $b \in B$. Deci $b \in \complement A$.

Scanned with OKEN Scanner

1.2.2. Dacă A și B sînt mulțimi, mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile A sau B se numește *reuniunea mulțimilor* date și se notează $A \cup B$.

Proprietățile următoare

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

se verifică imediat. A doua proprietate permite să scriem, suprimînd parantezele,

$$(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

Operația de reuniune se poate extinde la mulțimile unei familii $\mathcal{A}$ de mulțimi.

Mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile familiei $\mathcal{A}$ se numește *reuniunea* mulțimilor familiei și se notează astfel:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Exerciții: 1° Să se arate că $A \subseteq B$ și $B \subseteq C$ implică $A \subseteq C$ (incluziunea este tranzitivă).

2° Să se arate că

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

3° Cît face $\bigcup_{A \in \mathcal{P}(T)} A$?

1.2.3. Dacă A și B sînt mulțimi, mulțimea elementelor care aparțin *simultan* lui A și lui B se numește intersecția mulțimilor A și B și se notează $A \cap B$.

Egalitatea

$$A \cap B = \emptyset$$

exprimă faptul că mulțimile A și B nu au nici un element comun. Vom spune, în acest caz, că mulțimile A și B sînt *disiuncte* sau că nu se intersectează.

Proprietățile

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

se verifică cu ușurință. Și aici putem suprima parantezele, scriind

$$(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$$

Ca și operația de reuniune, operația de intersecție poate fi definită pentru mulțimile aparținînd unei familii $\mathcal{A}$.

Prin definiție

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ pentru orice } A \in \mathcal{A}\}.$$

T e o r e m ă.

$$B \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (B \cap A).$$

(Altfel exprimat: *Intersecția este distributivă față de reuniune.*)

Să notăm, respectiv, cu E_1 și E_2 cele două mulțimi. Dacă $x \in E_1$, atunci $x \in B$ și $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, deci există cel puțin o mulțime A astfel încît $x \in A$. Dar atunci $x \in B \cap A$ (pentru acest A particular!), de unde $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (B \cap A)$.

Reciproc, dacă $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (B \cap A)$, atunci există cel puțin un $A \in \mathcal{A}$, pentru care $x \in B \cap A$, de unde $x \in B$ și $x \in A$ (pentru acest A particular). Dar ultima apartenență implică $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, de unde $x \in E_1$.

Exerciții:

1° Cît face

$$\bigcap_{A\in\mathfrak{P}(T)} A \ ?$$

2° Să se arate că

$$B \cup \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (B \cup A).$$

(Reuniunea este distributivă față de intersecție.)

3° Să se arate că

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \complement B,$$

(sau: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \complement A$).

1.2.4. Fie $\mathcal{A}$ o familie de mulțimi (din T).

Dacă un punct $x \in T$ aparține *tuturor* mulțimilor familiei, atunci

$$x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Scanned with OKEN Scanner

În caz contrar, există cel puțin o mulțime $A \in \mathcal{A}$ pentru care $x \notin A$, adică $x \in \mathbf{C}A$, de unde

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{C}A.$$

În definitiv,

$$T = \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) \cup \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{C}A\right).$$

Din însuși raționamentul făcut rezultă că cele două mulțimi din membrul II sînt disjuncte. Deci

$$\mathbf{C}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{C}A. \tag{1}$$

Putem, de asemenea, scrie

$$\mathbf{C}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{C}A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A. \tag{1'}$$

Să considerăm, acum, familia $\mathcal{B}$ a complementarelor mulțimilor din $\mathcal{A}$ și să aplicăm formula (1') acestei familii. Avem

$$\mathbf{C}\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathbf{C}B\right) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Dar $B = \mathbf{C}A$, $A \in \mathcal{A}$. În asemenea condiții, formula precedentă devine

$$\mathbf{C}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{C}A. \tag{2}$$

Formulele (1) și (2) sînt foarte utile în topologie. Ele sînt cunoscute sub numele de formulele lui *De Morgan*.

1.2.5. Dacă A și B sînt mulțimi, mulțimea

$$\{x : x \in A, x \notin B\}$$

se notează[1] $A - B$. Trecerea de la perechea (A,B) la mulțimea $A-B$ se numește *scăderea* mulțimii B din mulțimea A.

Evident, $A - B \neq B - A$.

Operația $\mathbf{C}B$ este un caz particular al scăderii, deoarece, conform definiției de mai sus, putem scrie

$$\mathbf{C}B = T - B.$$

[1] În unele monografii sau memorii se întrebuințează notația $A \setminus B$.

Acest lucru ne sugerează să scriem, în cazul $B \subseteq A$,

$$A - B = \complement_A B$$

și să numim mulțimea $A - B$ complementara mulțimii B în raport cu mulțimea A.

Exerciții. 1° $A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$.

2° $A - B = A \cap \complement B$.

3° $A - (A - B) = A \cap B$.

4° $A \cap (E - F) = (A \cap E) - F$.

§ 3. RELAȚII

1.3.1. Ideea familiară de relație implică existența a cel puțin două obiecte care se impun simultan atenției noastre, pentru a decide dacă există vreo legătură („relație") între ele.

Dacă, de exemplu, *primul obiect* este un punct a din mulțimea T, iar *al doilea obiect* este o mulțime A din $\mathfrak{P}(T)$, o relație care ne interesează între aceste două obiecte este de a ști dacă a „aparține" lui A. (O altă relație care ne interesează este de a ști dacă a „ nu aparține" lui A.)

Dacă primul obiect este un număr natural m și al doilea obiect este tot un număr natural n, între aceste două obiecte putem căuta diferite relații:

1° Putem cerceta dacă m este mai mic decît n.

2° Putem cerceta dacă m este mai mare decît n.

3° Putem cerceta dacă m divide pe n etc.

Pentru a scrie că două obiecte, luate într-o ordine dată, se află într-o anumită relație, matematica a creat diverse semne.

Astfel:

$$a \in A,\ a \notin A,\ m < n,\ m > n,\ m \mid n.$$

Evident, noțiunea de relație poate fi admisă, cel puțin într-o primă tratare (așa cum se procedează în cursurile clasice de analiză sau de algebră), ca o noțiune primară. Există totuși un mijloc de a defini matematic această noțiune, cu ajutorul altor noțiuni, în special al noțiunii de mulțime.

Ideea care stă la baza acestei definiții este de a considera, o dată cu perechea de obiecte studiate, mulțimea I căreia îi aparține primul obiect și mulțimea II căreia îi aparține al doilea obiect și de a forma

cu ajutorul acestor două mulțimi o a treia mulțime, anume o mulțime de *perechi de obiecte*, astfel încît în fiecare pereche obiectele să se afle în relația cerută.

Astfel, în primul exemplu de mai sus, mulțimea I va fi T, iar mulțimea II va fi $\mathfrak{P}(T)$. În celelalte trei exemple mulțimile I și II coincid cu mulțimea N a numerelor naturale.

Să mai observăm, din exemplele date, că dacă un obiect α se află într-o anumită relație cu un obiect β, obiectul β nu se mai află în general în aceeași relație cu obiectul α. Această observație ne conduce să facem distincția între perechea (α, β) și perechea (β, α).

1.3.2. Cu explicațiile date mai sus, putem da o definiție riguroasă noțiunii de relație.

Fie (α, β) o pereche de obiecte, de natură nespecificată. Dacă convenim să considerăm perechea (β, α) ca o pereche distinctă de prima, vom spune că prima pereche (deci și a doua pereche) este o pereche *ordonată*. Vom nota $<\alpha, \beta>$ o pereche ordonată.

Fie Φ, Ψ două mulțimi. Vom numi *relație* (subînțeles: între Φ și Ψ) orice mulțime de perechi ordonate $<u, v>$ în care

$$u \in \Phi, \qquad v \in \Psi.$$

Un exemplu imediat de relație se obține considerînd mulțimea *tuturor* perechilor ordonate $<u, v>$ cu $u \in \Phi$, $v \in \Psi$.

Această relație particulară se notează $\Phi \times \Psi$ și se numește *produsul cartezian* al mulțimilor Φ și Ψ.

Cu această terminologie introdusă, o relație între Φ și Ψ poate fi definită ca o *parte* a produsului cartezian $\Phi \times \Psi$.

Vom nota în acest paragraf relațiile cu litere mici ale alfabetului elen: $\rho, \sigma, \omega, \vartheta \ldots$

Dacă $<u, v> \in \rho$, vom spune că între obiectele u, v se află relația ρ și vom exprima acest lucru în scris și în modul următor: $u \rho v$.

Vom numi mulțime de definiție a unei relații ρ mulțimea $\Phi_0 \subseteq \Phi$ definită astfel:

$\Phi_0 = \{U$: există $v \in \Psi$ astfel încît $<u, v> \in \rho\}$. Vom numi mulțime a valorilor unei relații ρ mulțimea $\Psi_0 \subseteq \Psi$ definită astfel:

$\Psi_0 = \{v$: există U astfel încît $<u, v> \in \rho\}$.

Evident: $\rho \subseteq \Phi_0 \times \Psi_0 \subseteq \Phi \times \Psi$.

O relație poate fi definită prin o proprietate $P(x, y)$ privind perechea ordonată $<x, y>$ și considerînd toate perechile $<x, y>$ pentru care $P(x, y)$ este adevărată.

Exemple: 1° Dacă $P(a, A)$, unde $a \in T$ și $A \in \mathfrak{P}(T)$ exprimă faptul că a aparține lui A, atunci mulțimea perechilor ordonate $<a, A>$ pentru care $P(a, A)$ este adevărată constituie o relație numită relația de aparte-

nență. Dacă notăm „$\in$" această relație, faptul că $<a, A> \in$ „$\in$" se va scrie, simplu, așa cum am făcut în 1.1.1.,

$$a \in A.$$

2° Dacă $P(m, n)$, unde m și n sînt numere naturale, exprimă faptul că m este mai mic decît n, atunci mulțimea perechilor ordonate $<m, n>$ pentru care $P(m, n)$ este adevărată este o relație.

Să notăm cu „$<$" această relație.

Apartenența $<m, n> \in$ „$<$" se va scrie. simplu, așa cum se face tradițional,

$$m < n.$$

3° Dacă $P(x, y)$, unde x și y sînt numere reale (deci $x \in R$, $y \in R$), exprimă că punctul din plan de coordonate (x, y) este interior unui cerc γ cu centrul în origine și cu raza 1, atunci mulțimea perechilor ordonate $<x, y>$ pentru care $P(x, y)$ este adevărată este o relație. Geometric, această relație se reprezintă prin *discul* limitat de cercul γ.

Dacă Φ este o mulțime, orice parte a produsului cartezian $\Phi \times \Phi$ se numește *o relație în* Φ. Între relațiile într-o mulțime Φ, un rol special îl joacă relația definită ca mulțime a perechilor $<u, u>$ cu $u \in \Phi$. Această relație se numește *relația identitate*, sau *relația diagonală*, și va fi notată cu δ.

Numele de relație diagonală se explică prin cazul particular în care $\Phi = R$. Atunci δ este mulțimea perechilor $<x, x>$, în care $x \in R$, mulțime care se reprezintă geometric prin diagonala axelor de coordonate în planul $R \times R$.

Între părțile produsului cartezian $\Phi \times \Psi$ trebuie să considerăm și partea vidă, pe care o vom numi *relația vidă*.

În cele ce urmează, orice relație considerată va fi presupusă *nevidă*, în afară de cazul în care se specifică contrariul.

1.3.3. Fie ρ o relație între mulțimile X și Y și σ o relație între mulțimile Y, Z. *Dacă mulțimea de definiție a lui* σ *conține mulțimea* valorilor lui ρ, atunci se poate defini o relație între X și Z ca mulțime a tuturor perechilor $<x, z>$, cu $x \in X$, $z \in Z$, astfel încît există $y \in Y$, cu proprietățile

$$<x, y> \in \rho, \qquad <y, z> \in \sigma.$$

Vom numi această relație *compunere* a relațiilor ρ și σ (în ordinea indicată !) și o vom nota $\sigma \circ \rho$.

Ca exemplu simplu de compunere a două relații avem relațiile $\sigma \circ \delta$ și $\delta' \circ \rho$, unde δ este relația identitate în X iar δ' relația identitate în Y. Avem, evident,

$$\sigma \circ \delta = \sigma, \qquad \delta' \circ \rho = \rho.$$

Dacă ρ este o relație în X, atunci avem

$$\rho \circ \delta = \delta \circ \rho.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.3.4. Oricărei relații ρ între X și Y îi corespunde o relație ρ^{-1} între Y și X, definită în modul următor:

$$<y, x> \in \rho^{-1} \text{ dacă și numai dacă } <x, y> \in \rho.$$

Relația ρ^{-1} se numește *reciproca* sau *inversa* relației ρ.

Teorema de compunere a relațiilor. *Fie ρ o relație între X, Y și σ o relație între Y, Z. Dacă mulțimea valorilor lui ρ coincide cu mulțimea de definiție a lui σ, atunci avem*

$$(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}.$$

Pentru stabilirea acestei egalități, să observăm că $<z, x> \in (\sigma \circ \rho)^{-1}$ dacă și numai dacă $<x, z> \in \sigma \circ \rho$, ceea ce înseamnă, potrivit definiției compunerii a două relații, că există $y \in Y$, astfel încît

$$<x, y> \in \rho \text{ și } <y, z> \in \sigma,$$

de unde

$$<z, y> \in \sigma^{-1} \text{ și } <y, x> \rho^{-1},$$

deci, potrivit aceleiași definiții,

$$<z, x> \in \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}.$$

Deci $<z, x> \in (\sigma \circ \rho)^{-1}$ dacă și numai dacă $<z, x> \in \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$, de unde egalitatea din enunț.

1.3.5. O clasă specială de relații într-o mulțime X prezintă în diverse ramuri ale matematicii o importanță deosebită: este vorba de așa-numitele *relații de echivalență*.

O relație ρ în X este, prin definiție, *reflexivă* dacă pentru orice $x \in X$ avem $x \rho x$ (adică $<x, x> \in \rho$).

O relație ρ în X este, prin definiție, *simetrică* dacă

$$x \rho y \Rightarrow y \rho x.$$

O relație ρ în X este, prin definiție, *tranzitivă* dacă

$$x \rho y \text{ și } y \rho z \Rightarrow x \rho z.$$

O relație în X, care este în același timp reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește o *relație de echivalență*. Se notează deseori o relație de echivalență cu semnul „$\sim$". Cu această notație, o relație de echivalență este caracterizată prin proprietățile:

1° $x \sim x$, pentru orice $x \in X$;
2° $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
3° $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Exemple: 1° Relația diagonală δ, care se notează obișnuit „$=$", constituie un exemplu evident de relație de echivalență.

Scanned with OKEN Scanner

2° Dacă X este mulțimea tuturor triunghiurilor asemenea cu un triunghiu dat x, mulțimea perechilor de elemente din X constituie o relație de echivalență.

3° În mulțimea numerelor naturale, mulțimea perechilor $< x, y >$, astfel încît $|x - y|$ este divizibil printr-un număr prim dat p, formează o *relație de echivalență*. O astfel de relație se numește, în teoria numerelor, o relație de *congruență*. Faptul că x este echivalent cu y, în sensul precizat aici, se exprimă în teoria numerelor astfel:

$$x \equiv y(p)$$

și se citește: x este congruent cu y, „modulo" p.

Teoremă. *Dacă ρ este o relație de echivalență în mulțimea X, atunci există o descompunere a lui X în mulțimi disjuncte, astfel încît pentru o pereche (x, y) de elemente arbitrare ale oricăreia din aceste mulțimi să avem $x \rho y$.*

Fie $x \in X$, altfel arbitrar. Vom pune

$$\hat{x} = \{y : < x, y > \in \rho\}.$$

Deoarece $< x, x > \in \rho$, rezultă că $x \in \hat{x}$.

Vom numi mulțimea $\hat{x}$ *clasa de echivalență* generată de elementul x.

Deoarece $x \in \hat{x}$, pentru orice $x \in X$, rezultă că

$$X = \bigcup_{x \in X} \hat{x}.$$

Fie x, y două elemente din X. Va fi suficient să arătăm că dacă $\hat{x} \cap \hat{y} \neq \emptyset$, atunci $\hat{x} = \hat{y}$. În adevăr, fie $z \in \hat{x} \cap \hat{y}$.

Pentru orice element $x \in \hat{x}$ avem $x \rho z$. De asemenea, pentru orice element $y \in \hat{y}$ avem $z \rho y$. Deducem, în baza tranzitivității, $x \rho y$, adică simultan $x \in \hat{y}$, oricare ar fi $x \in \hat{x}$, de unde $\hat{x} \subseteq \hat{y}$ și $y \in \hat{x}$, oricare ar fi $y \in \hat{y}$, de unde $\hat{y} \subseteq \hat{x}$.

Observație. O descompunere a unei mulțimi X în mulțimi disjuncte se numește *o partiție a lui X*. Cu această convenție de limbaj, teorema demonstrată se poate enunța, mai condensat, astfel:

Orice relație de echivalență într-o mulțime X determină o partiție a acestei mulțimi în clase de echivalență în raport cu această relație.

Mulțimea claselor de echivalență determinate de ρ se numește mulțimea-cît a lui X prin ρ și se notează $X|\rho$.

Exerciții: 1° Să se arate că orice partiție a unei mulțimi X determină o relație de echivalență în X. (Reciproca teoremei precedente.)

2° Să se arate că o relație ρ în mulțimea X este reflexivă dacă și numai dacă $\delta \subseteq \rho$.

3° Să se arate că o relație ρ în mulțimea X este tranzitivă dacă și numai dacă $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

R: Fie $<x, y> \in \rho$, $<y, z> \in \rho$. Atunci $<x, z> \in \rho \circ \rho$. Deci dacă $\rho \circ \rho \subseteq \rho$, relația ρ este tranzitivă. Reciproc, fie ρ tranzitivă și $<x, z> \in \rho \circ \rho$. Aceasta înseamnă, potrivit definiției compunerii a două relații ,că există $y \in X$, astfel încît $<x, y> \in \rho$, $<y, z> \in \rho$, de unde, în baza tranzitivității, $<x, z> \in \rho$. Așadar $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

4° Să se arate că dacă ρ, σ, ϑ sînt relații în mulțimea X, atunci

$$(\rho \circ \sigma) \circ \vartheta = \rho \circ (\sigma \circ \vartheta).$$

§ 4. FUNCȚII (APLICAȚII)

1.4.1. Relațiile pe care le vom studia în acest paragraf vor fi relații speciale, pe care le vom nota, indiferent, cu litere mici ale alfabetului latin

$$f, g, h$$

sau cu litere elene:

$$\varphi, \psi, \ldots, \chi, \ldots$$

Vom spune că o relație f între mulțimile X, Y este o aplicație a mulțimii X în mulțimea Y dacă:

1° Mulțimea de definiție a lui f este X;

2° $<x, y> \in f$ și $<x, y_1> \in f$ implică $y = y_1$.

Ultima condiție exprimă faptul că un element $x \in X$ se află în relația f cu un element $y \in Y$ și cu unul singur.

Tradițional, acest lucru se exprimă astfel: lui x îi corespunde, prin f, un y și unul singur. Acest element y se notează $f(x)$ sau f_x și se numește *valoarea* aplicației f pentru elementul x (sau: în punctul x).

Mulțimea valorilor aplicației f se notează $f(X)$. *Evident*, $f(X) \subseteq Y$.

Dacă $f(X) = Y$, atunci f este, prin definiție, un *epimorfism* (sau încă: o aplicație a lui X pe mulțimea Y).

Mai general, dacă $A \subseteq X$, se pune

$$f(A) = \{y : f(x) = y,\ x \in A\};$$

$f(A)$ se numește imaginea prin f a mulțimii A.

Scanned with OKEN Scanner

În loc de *aplicație* se utilizează, fără preferințe speciale, termenii: *funcție, transformare, operație, operator*[1].

Vom scrie că f este o aplicație a mulțimii X în mulțimea Y astfel:

$$f: X \to Y.$$

Dacă nu este necesară specificarea mulțimilor X, Y, o aplicație se poate nota astfel:

$$x \to f(x).$$

Ultima notație este indispensabilă atunci cînd în definiția funcției nu se poate evita simbolul x, ca în exemplul următor, în care X este mulțimea numerelor reale:

$$x \to \frac{x}{x^2+1}.$$

În afară de asemenea cazuri concrete, este util să se distingă între simbolul f(= funcție) și $f(x)$ (= valoarea funcției f în punctul x).

Este vizibil de altfel că

$$f \in \mathfrak{P}(X \times Y), \quad f(x) \in Y.$$

Atunci cînd în definirea noțiunii de funcție se utilizează noțiunea de „lege de corespondență", se definește *graficul* Γ_f al unei funcții f, prin egalitatea:

$$\Gamma_f = \{< x, y >: y = f(x)\}.$$

În definiția dată de noi mai sus, o funcție și graficul său sînt identificate. Această identificare, departe de a constitui un inconvenient, permite o definiție precisă a unei noțiuni atît de importante ca noțiunea de funcție. De altfel, scrierea obișnuită a unui șir de numere reale,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

adică, în fapt,

$$< 1, a_1 >, \quad < 2, a_2 >, \ldots, < n, a_n >, \ldots,$$

care constituie o aplicație a mulțimii numerelor naturale în mulțimea numerelor reale, nu este altceva decît graficul, potrivit definiției de mai sus, al acestei aplicații.

Dacă f și g sînt egale, în sensul definit mai sus (1.1.1), aceasta înseamnă că $< x, y > \in f$ implică $< x, y > \in g$ și reciproc. Cum x se află în relația f, ca și în relația g cu un singur y, rezultă

$$f(x) = g(x) \text{ pentru orice } x \in X.$$

[1] Ultimul termen pare totuși să fie preferat în cazul în care $X = Y$.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă această egalitate are loc pentru orice $x \in X$, atunci f și g reprezintă aceeași funcție, adică $f = g$.

Să observăm că relația diagonală într-o mulțime X reprezintă, în fapt, o funcție: vom numi această funcție funcția *identică* definită pe X. Dacă $f(X) = y_0$, vom spune că f este o *funcție constantă* pe X.

1.4.2. Fie $f: X \to Y$ o funcție și $X_0 \subset X$. Dacă $f_0: X_0 \to Y$ este o funcție astfel încît

$$x \in X_0 \Rightarrow f(x) = f_0(x),$$

funcția f_0 se numește restricția lui f la X_0 și se notează f_{X_0} sau $f|X_0$.

Dacă, acum, presupunem funcția $f_0: X_0 \to Y$ *dată*, *orice* funcție $f: X \to Y$ pentru care implicația precedentă este adevărată se numește o *extensiune* sau o *prelungire* a lui f_0 la mulțimea X.

Din implicația de mai sus rezultă că o funcție dată pe X are o *singură* restricție la o submulțime $X_0 \subset X$ dată. Dimpotrivă, nu există o singură prelungire a unei funcții f_0 definite pe X_0 la o funcție f definită pe X. (Cititorul va putea verifica singur, prin exemplu, această ultimă afirmație.)

Această constatare a fost punctul de plecare al unui șir întreg de probleme care pot fi grupate într-o aceeași formulare generală:

Fiind dată o funcție f_0 definită pe o parte X a unei mulțimi X, cu *anumite proprietăți*, se poate prelungi această funcție la mulțimea X, *cu păstrarea acestor proprietăți*?

Vom întîlni, în cursul nostru, astfel de probleme.

O funcție $f: X \to Y$, considerată ca o relație între X și Y, are o inversă f^{-1}, care este o relație între Y și X sau, mai exact, între $f(Y)$ și X, definită astfel:

$$< y, x > \in f^{-1} \Leftrightarrow < x, y > \in f.$$

Dacă $B \subseteq f(X)$, mulțimea $\{x : f(x) \in B\}$ se numește imaginea reciprocă (prin f) a mulțimii B și se notează $f^{-1}(B)$.

Relația f^{-1} nu este, în general, o funcție. Pentru ca f^{-1} să fie o funcție, trebuie, potrivit definiției date, să avem implicația

$$< y, x_1 > \in f^{-1} \text{ și } < y, x_2 > \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Este același lucru a cere verificarea implicației

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2 \text{ și } x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2.$$

O funcție f pentru care relația f^{-1} este tot o funcție se numește o *funcție biunivocă* sau o *injecție*.

O funcție care este în același timp o injecție și un epimorfism se numește *o bijecție*. Este evident că dacă $f: X \to Y$ este o bijecție, $f^{-1}: Y \to X$ este o bijecție.

Teoremei de compunere a relațiilor, valabilă și în cazul funcțiilor, îi putem da o formă locală foarte utilă în cazul bijecțiilor:

Scanned with OKEN Scanner

Teorema de compunere a bijecțiilor. *Dacă* $f: X \to Y$ *și* $g: Y \to Z$ *sînt bijecții, atunci* $(g \circ f)$ *este o bijecție și*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Egalitatea din enunț este un caz particular al egalității demonstrate în 1.3.4. Rămîne să arătăm că $g \circ f$ este o bijecție. În adevăr, dacă $x_1 \in X$,, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$, de unde $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

Observație importantă. Este bine să observăm că dacă f este o funcție, atunci $f \circ f^{-1}$ este o aplicație, și anume aplicația identică a spațiului Y în el însuși, în timp ce $f^{-1} \circ f$ este o relație în X.

În adevăr, în primul rînd este evident că $f \circ f^{-1} \subseteq Y \times Y$. Fie atunci,

$$< y', y'' > \in f \circ f^{-1}, \qquad y' \in Y, \ y'' \in Y.$$

Potrivit definiției compunerii relațiilor, există $x \in X$, astfel încît $< y', x > \in f^{-1}$ sau $< x, y' > \in f$ și $< x, y'' > \in f$, de unde (f fiind o funcție !) $y' = y''$.

Deci $f \circ f^{-1} = \delta'$.

În al doilea rînd, vom observa că $f^{-1} \circ f \subseteq X \times X$. Fie deci $< x', x'' > \in$ $\in f^{-1} \circ f$.

Aceasta înseamnă că există $y \in Y$ astfel încît $< x', y > \in f$ și $< y, x'' > \in$ $\in f^{-1}$ sau $< x'', y > \in f$. Din compararea ambelor relații de apartenență deducem :

$$f^{-1} \circ f = \{< x', x'' > : f(x') = f(x'')\}.$$

Se verifică ușor că această relație este reflexivă, simetrică și tranzitivă : ea este deci o relație de echivalență în X.

Exerciții : 1° Să se arate că dacă $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, atunci

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B).$$

2° Să se arate că dacă $Y_1 \subseteq Y$, $Y_2 \subseteq Y$, atunci

$$Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2).$$

1.4.3. Noțiunea de bijecție ne permite să punem în evidență o importantă relație de echivalență în mulțimea $\mathfrak{P}(X)$ a părților unei mulțimi X[1].

Vom spune că două părți A, B ale lui X sînt *echipotente* (sau : au aceeași putere) dacă există o bijecție : $f: A \to B$. Vom scrie acest lucru astfel : $A \sim B$. Propoziția

$$\rho(A, B) = A \text{ este echipotentă cu } B,$$

[1] X poate fi mulțimea fundamentală T, mulțimea $\mathfrak{P}(T)$, mulțimea $\mathfrak{P}\mathfrak{P}(T)$, ... sau o parte a uneia din aceste mulțimi.

determină în $\mathfrak{P}(X)$ o relație, care se numește *relația de echipotență* a mulțimilor. Această relație este, în fapt, o relație de echivalență. În adevăr, în primul rînd, relația diagonală în A este o bijecție a lui A în A, de unde $A \sim A$. În al doilea rînd, în baza unei observații făcute mai sus

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A.$$

În al treilea rînd, din demonstrația teoremei de compunere a bijecțiilor rezultă că

$$A \sim B \text{ și } B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

Să notăm, pentru moment, cu ρ această relație. Prin definiție, orice element al mulțimii cît X/ρ se numește un *număr cardinal*. Un număr cardinal este așadar o clasă de echivalență determinată de relația ρ.

Să presupunem, de exemplu, că $X \supset N$, unde N este mulțimea numerelor naturale și să notăm cu N_n mulțimea numerelor naturale care nu sînt mai mari decît n.

Elementul din mulțimea X/ρ care conține mulțimea N_n se notează cu n: el este, prin definiție, un număr cardinal *finit*.

Orice număr cardinal care nu este finit este, prin definiție, un număr cardinal *transfinit*.

De exemplu, clasa de echivalență care conține mulțimea N este un număr cardinal transfinit. Această clasă se notează astfel: $\aleph_0$ (citit: alef zero).

Orice mulțime echivalentă cu N_n se numește o mulțime *finită*. Orice mulțime care nu este finită este, prin definiție, o mulțime *infinită*.

Orice mulțime din clasa $\aleph_0$ se numește o mulțime *numerabilă*.

O mulțime care este finită sau numerabilă se numește o mulțime *cel mult numerabilă*.

Teorema I. *Orice mulțime infinită A conține o parte numerabilă.*

În adevăr, mulțimea A conține un element; fie a_1 acest element. Mulțimea

$$A_1 = A - \{a_1\}$$

conține un element a_2; ș.a.m.d.

Mulțimea

$$D = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

este numerabilă.[1]

Teorema II. *Dacă A este o mulțime infinită și D o mulțime numerabilă, atunci*

$$A \cup D \sim A.$$

[1] În § 6 (în special în 1.6.4.) vom avea justificarea acestui raționament.

În adevăr, în baza teoremei 1, A conține o parte numerabilă D_1. Fie $A_1 = A - D_1$. Rezultă că

$$A = A_1 \cup D_1$$

și

$$A \cup D = (A_1 \cup D_1) \cup D = A_1 \cup (D \cup D_1).$$

Dar $D \cup D_1$ este o mulțime numerabilă. Deci

$$A_1 \cup D_1 \sim A_1 \cup (D \cup D_1),$$

adică

$$A \cup D \sim A.$$

Exerciții: 1° Să se arate că toate intervalele deschise sînt echipotente între ele.

R: Dacă (a, b) și (c, d) sînt două astfel de intervale, aplicația $x \to \alpha x + \beta$, cu α și β convenabili aleși, constituie o bijecție a primului interval în al doilea.

2° Să se arate că un interval (a, b) este echipotent cu mulțimea R a numerelor reale.

R: Bijecția $x \to \frac{a-x}{x-b}$ arată că (a, b) este echipotent cu $(0, \infty)$, iar bijecția $x \to \log x$ arată că $(0, \infty)$ este echipotent cu $(-\infty, +\infty)$.

3° Fie Q mulțimea numerelor raționale. Să se arate că $Q \in \aleph_0$.

1.4.4. Există mulțimi infinite care să nu fie numerabile? Un exemplu simplu de o astfel de mulțime (istoricește primul exemplu, dat de G. Cantor) este constituit de mulțimea R a numerelor reale. În baza exercițiului 2° de mai sus este suficient să arătăm că mulțimea numerelor intervalului $(0,1)$ nu este numerabilă.

Să presupunem că această mulțime ar fi numerabilă și fie, în acest caz, a_n numărul real din $(0,1)$ care corespunde lui n. Utilizînd reprezentarea zecimală (de exemplu; în fapt, orice reprezentare este bună), putem scrie numerele $a_1, a_2, \ldots$ sub forma de fracții zecimale cu o infinitate de cifre:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \ldots \\
a_2 &= 0, a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= 0, a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots . \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vom defini acum un număr real b din $(0,1)$, în felul următor:

$$b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots,$$

unde b_n poate fi *orice* cifră afară de zero, nouă sau a_{nn}. Adică:

$$b_n \neq 0, \; b_n \neq 9, \; b_n \neq a_{nn}.$$

Prin ipoteză, b trebuie să facă parte din șirul precedent. Fie, de exemplu,

$$b = a_n.$$

Dar atunci, în virtutea *unicității* reprezentării zecimale cu o infinitate de cifre, ar trebui să avem

$$b_1 = a_{n1},\ b_2 = a_{n2},\ \ldots,\ b_n = a_{nn},\ \ldots$$

Contradicția obținută arată că ipoteza că (0,1) este o mulțime numerabilă este absurdă.

Se obișnuiește să se noteze cu $\mathfrak{c}$ (a treia literă a alfabetului minuscul gotic) clasa de echivalență din care face parte mulțimea (0,1), deci și mulțimea R.

1.4.5. Imaginile directe, ca și imaginile reciproce prin o funcție dată f, vor juca mai tîrziu un rol important. De aceea considerăm necesar să stabilim de pe acum cîteva relații în care intervin aceste imagini:

Teoremă. *Dacă* $f: A \to B$ *și dacă* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ *sînt familii de mulțimi, respectiv din* A *și din* B, *atunci*

(I) $$f^{-1}\left(\bigcup_{Y\in\mathfrak{Y}} Y\right) = \bigcup_{Y\in\mathfrak{Y}} f^{-1}(Y),$$

(II) $$f^{-1}\left(\bigcap_{Y\in\mathfrak{Y}} Y\right) = \bigcap_{Y\in\mathfrak{Y}} f^{-1}(Y),$$

(III) $$f\left(\bigcup_{X\in\mathfrak{X}} X\right) = \bigcup_{X\in\mathfrak{X}} f(X),$$

(IV) $$f\left(\bigcap_{X\in\mathfrak{X}} X\right) \subseteq \bigcap_{X\in\mathfrak{X}} f(X).$$

În adevăr, fie $x\in f^{-1}(\bigcup_{Y\in\mathfrak{Y}} Y)$. Aceasta înseamnă că $f(x)\in\bigcup_{Y\in\mathfrak{Y}} Y$, deci există cel puțin o mulțime Y a familiei $\mathfrak{Y}$ pentru care $f(x)\in Y$. Aceasta înseamnă că $x\in f^{-1}(Y)$, de unde $x\in\bigcup_{Y\in\mathfrak{Y}} f^{-1}(Y)$.

Reciproc, dacă x aparține ultimei reuniuni, atunci există cel puțin o mulțime $f^{-1}(Y)$ pentru care $x\in f^{-1}(Y)$, adică $f(x)\in Y$, de unde $f(x)\in\bigcup_{Y\in\mathfrak{Y}} Y$. Dar aceasta înseamnă că

$$x\in f^{-1}\left(\bigcup_{Y\in\mathfrak{Y}} Y\right)$$

și egalitatea (I) este stabilită.

După o schemă analogă de raționament se poate stabili egalitatea (II). Pentru stabilirea egalității (III) vom observa că dacă $y_0 \in f(\bigcup_{X\in\mathfrak{X}} X)$, atunci există $x_0 \in \bigcup_{X\in\mathfrak{X}} X$, astfel încît $f(x_0) = y_0$. Fie $X_0 \in \mathfrak{X}$ astfel încît $x_0 \in X_0$. Atunci $f(x_0) = I_0 \in f(X_0) \subseteq \bigcup_{X\in\mathfrak{X}} f(X)$. Deci

$$f\left(\bigcup_{X\in\mathfrak{X}} X\right) \subseteq \bigcup_{X\in\mathfrak{X}} f(X).$$

Fie, acum, $y_1 \in \bigcup_{X\in\mathfrak{X}} f(X)$. Există X_1 astfel încît

$$y_1 \in f(X_1) \subseteq f\left(\bigcup_{X\in\mathfrak{X}} X\right),$$

de unde

$$\bigcup_{X\in\mathfrak{X}} f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{X\in\mathfrak{X}} X\right)$$

și egalitatea (III) este stabilită.

Pentru stabilirea incluziunii (IV) vom considera un punct $y \in f(\bigcap_{X\in\mathfrak{X}} X)$. Există $x \in \bigcap_{X\in\mathfrak{X}} X$, astfel încît $f(x) = y$. Din apartenența precedentă rezultă că

$$x \in X \quad \text{pentru orice } X \in \mathfrak{X},$$

deci

$$y = f(x) \in f(X) \text{ pentru orice } X \in \mathfrak{X},$$

adică

$$y \in \bigcap_{X\in\mathfrak{X}} f(X),$$

de unde incluziunea (IV).

Observație importantă. Se poate da ușor un exemplu în care incluziunea din relația (IV) este o incluziune strictă. Să luăm

$$X' = (-1,0], \qquad X'' = [0,1)$$

și $f: x \to x^2$. Aici avem

$$f(X' \cap X'') = \{0\}, \qquad f(X') = f(X'') = [0,1),$$

deci

$$f(X' \cap X'') \subset f(X') \cap f(X'').$$

§ 5. FUNCŢIA CARACTERISTICĂ A UNEI MULŢIMI. LIMITELE EXTREME ALE UNEI FAMILII DE MULŢIMI

1.5.1. Fie A o parte a spaţiului T. Aplicaţia

$$\chi_A : T \to R$$

definită pentru fiecare element $t \in T$ astfel

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in A, \\ 0, & \text{dacă } t \notin A, \end{cases}$$

se numeşte[1] *funcţia caracteristică* a mulţimii A.

Evident:

1° $\chi_\emptyset = 0$, adică $\chi_\emptyset(t) = 0$ pentru orice $t \in T$;

2° $\chi_T = 1$, adică $\chi_T(t) = 1$ pentru orice $t \in T$;

3° $\forall A : \chi_A + \chi_{\complement A} = 1$.

Orice aplicaţie $f : T \to R$ care ia numai valorile 0 şi 1 poate fi considerată ca funcţie caracteristică a mulţimii

$$A = \{t : f(t) = 1\}.$$

1.5.2. Fie $\{A_n\}_{n \in N}$ un şir de părţi ale lui T. Funcţia $f : T \to R$ definită pentru orice $t \in T$ de egalitatea

$$f(t) = \limsup_{n \to \infty} \chi_{A_n}(t)$$

a evident numai valorile 0 şi 1. Există deci o mulţime E astfel încît

$$f = \chi_E.$$

Această mulţime se cheamă *limita superioară* a şirului $\{A_n\}$. În scris

$$E = \limsup_{n \to \infty} A_n.$$

Funcţia $g : t \to \liminf_{n \to \infty} \chi_{A_n}(t)$, ia, de asemenea numai valorile 0 şi 1. Există deci o mulţime F astfel încît

$$g = \chi_F.$$

---

[1] După de *La Vallée Poussin*, care a introdus această noţiune în ştiinţă.

Mulţimea F se numeşte *limita inferioară* a şirului de mulţimi $\{A_n\}$. În scris

$$F = \lim_{n\to\infty} \inf A_n.$$

Deoarece $g \leqq f$, rezultă că dacă $g(t) = 1$, atunci $f(t) = 1$, deci

$$\lim \inf A_n \subseteq \lim \sup A_n.$$

Dacă $E = F$, şirul $\{A_n\}$ este, prin definiţie, convergent.

Să observăm că din definiţia lui f rezultă că $f(t) = 1$ în punctele t pentru care $\chi_{A_n}(t) = 1$ pentru o *infinitate* de indici n şi numai în aceste puncte.

De asemenea, $g(t) = 1$ în punctele în care $\chi_{A_n}(t) = 0$ pentru un *număr finit* de indici n şi numai în aceste puncte.

De aici rezultă o nouă definiţie a limitelor extreme ale unui şir de mulţimi, independentă de noţiunea de funcţie caracteristică:

I. Limita superioară a unui şir $\{A_n\}$ de mulţimi este mulţimea punctelor din T care aparţin unei infinităţi de mulţimi din şirul considerat.

II. Limita inferioară a unui şir $\{A_n\}$ de mulţimi este mulţimea punctelor din T care aparţin aproape tuturor mulţimilor din şir (adică: tuturor mulţimilor şirului, cu excepţia unui număr finit din ele).

Această definiţie a fost dată de E. Borel.

Exerciţii: 1° Să se arate că orice şir *ascendent*[1] de mulţimi $\{A_n\}$ este convergent. Care este limita acestui şir?

2° Să se arate că orice şir descendent $\{A_n\}$ de mulţimi este convergent şi să se determine limita sa.

3° Care sînt limitele extreme ale şirului $A, B, A, B, \ldots$?

4° Să se stabilească relaţiile:

$$\lim \sup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n,$$

$$\lim \inf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n.$$

[1] Un şir $\{A_n\}$ de mulţimi este ascendent dacă $n < m \Rightarrow A_n \subseteq A_m$. Definiţie simetrică pentru şirurile descendente.

§ 6. RELAȚII DE ORDINE

1.6.1. O relație *tranzitivă* într-o mulțime X este, prin definiție *o relație de ordine*.

Exemple: 1° Relația „$<$" în mulțimea R a numerelor reale este o relație de ordine.

2° Relația „$\leqq$" în R este o relație de ordine.

3° Relația „$\subset$" în $\mathfrak{P}(T)$ este o relație de ordine.

4° În mulțimea D a partițiilor *finite* ale segmentului $[a, b]$ în intervale parțiale se poate stabili o relație „$<$", convenind că $d < d'$ dacă punctele de diviziune ale partiției d se află printre punctele de diviziune ale partiției d' (ordonarea *după finețe* a partițiilor).

5° În mulțimea precedentă se poate stabili o relație de ordine „$<<$" *după normă*, convenind că $d << d'$ dacă $\nu(d) \leqq \nu(d')$.

O relație de ordine poate fi și reflexivă.

Exemplul 2° este un exemplu de relație de ordine reflexivă.

O relație de ordine ρ în X este *totală* sau constituie o ordonare totală a mulțimii X, dacă *oricare* ar fi perechea (x', x'') de elemente distincte din X, avem

$$< x', x'' > \in \rho, \qquad \text{sau} \qquad < x'', x' > \in \rho.$$

Ori de cîte ori o relație de ordine este totală, vom specifica în mod expres acest lucru.

Relațiile de ordine din exemplele 1°, 2°, 5° sînt totale; celelalte, nu.

Fie X o mulțime în care este definită o relație de ordine „$<$" și Y o mulțime în care este definită o relație de ordine „$<<$". Orice aplicație $f: X \to Y$ pentru care $x' \in X$, $x'' \in X$, $x' < x'' \Rightarrow f(x') << f(x'')$ se numește o aplicație *izotonă*.

Exemple: 1° Orice funcție reală, crescătoare de o variabilă reală este o aplicație izotonă în raport cu relația de ordine „$\leqq$", atît în mulțimea de definiție cît și în mulțimea valorilor.

2° Dacă $f: X \to Y$, iar mulțimile X, Y sînt ordonate de relația „$\subseteq$", aplicația $\varphi: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y)$ definită de $A \to f(A)$ este izotonă.

Exercițiu. Să se arate că dacă ρ este o relație de ordine în X, relația sa reciprocă ρ^{-1} este o relație de ordine în X (numită deseori și relația *opusă* relației ρ).

Să se definească relațiile de ordine opuse relațiilor din cele cinci exemple date mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

1.6.2. Dacă în o mulțime X este definită o relație de ordine „$<$” și $A \subset X$, vom spune că elementul x este un *majorant*, sau o *margine superioară*, pentru mulțimea A (în raport cu relația „$<$”) dacă

$$\forall a \in A : a < x, \text{ sau } a = x.^1$$

În mod similar se definește un *minorant* sau o *margine inferioară* a mulțimii A (în raport cu „$<$”).

Mulțimea A_d a majorantelor lui A se numește *mulțimea majorantă* a lui A.

Mulțimea A_s a minorantelor lui A se numește *mulțimea minorantă* a lui A.

Una sau alta din mulțimile A_d, A_s poate fi vidă. De exemplu, în mulțimea N a numerelor naturale, ordonate de relația „$<$”, mulțimea

$$A = \{n : n > 5\}$$

are o majorantă A_d vidă. Mulțimea minorantă A_s nu este vidă:

$$A_s = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

O mulțime A este majorată (în X) dacă $A_d \neq \emptyset$,

O mulțime A este minorată (în X) dacă $A_s \neq \emptyset$.

Exerciții: 1° Să se dea un exemplu în care $A_d = A_s = \emptyset$.

2° Fiind dată o familie $\mathcal{A}$ de părți ale mulțimii T, cu relația de ordine „$\subseteq$”, să se determine familia majorantă și familia minorantă a lui $\mathcal{A}$.

3° Dacă în mulțimea A_d există d_A care să fie un minorant al lui A_d, acest element se cheamă un *supremum* al mulțimii A. Definiție analogă pentru „*infimul*” unei mulțimi A.

Să se arate că dacă relația de ordine din X este reflexivă, atunci orice mulțime A are cel mult un supremum și cel mult un infim.

1.6.3. Fie X o mulțime în care este definită o relație de ordine „$<$”. Vom spune că o parte A a lui X admite un *element maximal* (subînțeles: în raport cu relația „$<$”), dacă există un element $a \in A$, astfel încît

$$x \in A \text{ și } a < x \Rightarrow x = a.$$

În mod analog se definește un element minimal al lui A (în raport cu relația „$<$”).

Exemple: 1° În $\mathfrak{P}(T)$, mulțimea T este un element maximal în raport cu relația „$\subseteq$”.

---

[1] Evident, dacă relația „$<$” este reflexivă, este inutil să se mai adauge condiția $a = x$.

2° Dacă $X = \mathfrak{P}_1\left(R \times R\right)$ şi A este reuniunea familiilor de discuri

$$x^2 + y^2 < r^2, \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 < s^2, \quad r^2 \leqq 1, \quad s^2 \leqq 1,$$

mulţimea A are *două* elemente maximale, a nume discurile

$$D_1 : x^2 + y^2 < 1, \quad D_2 : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 < 1.$$

Exemplul precedent pune în evidenţă deosebirea dintre un element maximal şi supremul unei mulţimi. Pentru mulţimea A definită mai sus, supremul este mulţimea $D_1 \cup D_2$.

Cu definiţia de mai sus putem enunţa

Axioma lui Zorn: *Fie X o mulţime în care este definită o relaţie de ordine. Dacă orice parte total ordonată a lui X este majorată (în X), atunci X posedă un element maximal.*

În cursul nostru vom avea ocazia să utilizăm mai mult decît o dată această axiomă.

1.6.4. Fie $A \subseteq T$ şi $\mathfrak{P}(T)$ mulţimea părţilor lui T. Să punem $\mathfrak{P}_A = \mathfrak{P}(A) - \{\emptyset\}$.

Dacă există o aplicaţie

$$\alpha : \mathfrak{P}_A \to A$$

astfel încît

$$E \in \mathfrak{P}_A \Rightarrow \alpha(E) \in E,$$

vom numi o astfel de aplicaţie o funcţie *selectivă* pentru A[1].

Cu această definiţie, putem enunţa

Axioma lui Zermelo: *Pentru orice mulţime A există o funcţie selectivă.*

Se poate arăta că axiomele lui Zorn şi Zermelo sînt echivalente, în sensul că fiecare din ele implică pe cealaltă. Noi vom admite aici acest lucru (A se vedea, de exemplu, Miron Nicolescu, *Analiză Matematică* II, 1958, anexa 1.).

Axioma lui Zermelo intervine în foarte multe raţionamente în care intervin mulţimile infinite. În § 8 vom da şi noi unele aplicaţii ale acestei axiome[2].

---

[1] O astfel de aplicaţie, dacă există, asociază fiecărei submulţimi E a lui A un element din E.

[2] Cititorul este rugat să verifice (ca exerciţiu) că axioma lui Zermelo intervine în demonstrarea teoremei I din 1.4.3.

Scanned with OKEN Scanner

§ 7. PRODUS CARTEZIAN

1.7.1. Reamintim aici noțiunea de produs cartezian a două mulțimi: dacă A și B sînt aceste mulțimi, mulțimea

$$\{<a, b>\}_{\substack{a\in A\\ b\in B}}$$

este produsul cartezian al mulțimii A prin mulțimea B și se notează: $A \times B$.

Evident, în general,

$$A \times B \neq B \times A,$$

dar (1.4.3.)

$$A \times B \sim B \times A.$$

Dacă $A = B$, atunci produsul cartezian $A \times A$ se scrie condensat astfel: A^2.

Astfel, dacă $A = R$ (mulțimea numerelor reale), atunci R^2 reprezintă mulțimea perechilor ordonate de numere reale.

Această mulțime poate fi reprezentată prin mulțimea punctelor unui plan.

Cu definițiile date, mulțimile

$$(A \times B) \times C, \quad A \times (B \times C)$$

sînt diferite, dar

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C).$$

1.7.2. Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt mulțimi, mulțimea șirurilor ordonate

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}_{\substack{a_i\in A_i\\ i\leqq n}}$$

se numește produsul cartezian al celor n mulțimi, considerate în ordinea dată, și se notează

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \bigtimes_{i\leqq n} A_i.$$

Prin schimbarea ordinii factorilor într-un produs cartezian, se obțin mulțimi echipotente între ele și echipotente cu mulțimea inițială.

Dacă

$$A_1 = A_2 = \ldots A_n (= A),$$

produsul cartezian al acestor n mulțimi se notează simplu A^n.

În particular, dacă $A = R$, obținem mulțimea R^n care se numește *spațiul numeric real cu n dimensiuni.*

Fie $\{A_n\}_{n\in N}$ un șir de mulțimi. Mulțimea șirurilor

$$\{a_1, a_2, \ldots\}$$

în care $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots$, se numește produs cartezian al mulțimilor șirului considerat și se notează astfel:

$$\bigtimes_{n\in N} A_n.$$

1.7.3. Dacă ne reamintim că un șir $\{a_n\}_{n\in N}$ este o aplicație $a : n \to a_n$ a mulțimii numerelor naturale într-o anumită mulțime[1], atunci produsul cartezian poate fi definit ca mulțimea aplicațiilor $a: N \to \bigcup_{n\in N} A_n$, care sînt supuse condițiilor $a_n \in A_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ținînd seama de această nouă formă a definiției date pentru un șir, putem extinde cu ușurință noțiunea de produs cartezian la o familie oarecare $\{A_i\}_{i\in I}$ de mulțimi, unde I este o mulțime oarecare (așa-numita mulțime a indicilor). Se numește produs cartezian al mulțimilor familiei date și se notează

$$\bigtimes_{i\in I} A_i$$

mulțimea aplicațiilor

$$a : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

astfel încît $a_i \in A_i$.

Teoremă. *Axioma lui Zermelo este echivalentă cu propoziția următoare: Oricare ar fi familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de mulțimi nevide, produsul cartezian*

$$\bigtimes_{i\in I} A_i$$

nu este vid.

În adevăr, în baza axiomei lui Zermelo, există o funcție selectivă φ pentru mulțimea

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

[1] În cazul șirurilor numerice reale: mulțimea R.

Potrivit definiției acestei funcții, vom avea

$$\varphi(A_i) \in A_i.$$

Nu avem decît să punem $a_i = \varphi(A_i)$, deci

$$\bigtimes_{i \in I} A_i \neq \emptyset,$$

deoarece această mulțime conține cel puțin un element.

Reciproc: Să presupunem că oricare ar fi familia $\{A_i\}_{i \in I}$, produsul cartezian $\bigtimes_{i \in I} A_i$ nu este vid.

Vom *demonstra* că pentru orice mulțime B există o funcție selectivă φ.

Să considerăm o familie $\{A_i\}_{i \in I}$ în care mulțimile A_i sînt *disjuncte* și să punem, pentru un element[1] $a \in \bigtimes_{i \in I} A_i$,

$$C = \{a_i\}_{i \in I}.$$

Avem

$$C \cap A_i = a_i.$$

Așadar:

Z'. Dacă $\{A_i\}_{i \in I}$ este o familie de mulțimi disjuncte, există o mulțime C astfel încît intersecția $C \cap A_i$ este formată din un singur element, oricare ar fi $i \in I$.

Să considerăm, acum, o mulțime B, altfel arbitrară. Pentru orice

$$M \in \mathfrak{L}_B$$

vom pune

$$A^*_M = M \times \mathfrak{L}_B.$$

Familia $\{A^*_M\}$ este formată din mulțimi disjuncte. Există deci, în baza propoziției Z', o mulțime C^* care intersectează fiecare mulțime A^*_M după un singur element a^*_M. Deoarece

$$a^*_M \in A^*_M = M \times \mathfrak{L}_B,$$

aceasta înseamnă că pentru fiecare parte nevidă M a lui $\mathfrak{L}_B$ există un element $\varphi \in M$ și o mulțime $C^*_M \in \mathfrak{L}_B$ astfel încît

$$a^*_M = < \varphi, C^*_M >.$$

Aplicația $\varphi : \mathfrak{L}_B \to B$ este o funcție selectivă pentru B.

---

[1] Mulțimea $\bigtimes_{i \in I} A_i$ conține cel puțin un element, prin ipoteză.

Observație importantă. În demonstrarea ultimei părți a teoremei precedente am utilizat propoziția Z'; ar rezulta de aici că axioma lui Zermelo este o consecință a acestei propoziții. În realitate, avem propoziția exprimată de:

Teorema II. *Axioma lui Zermelo este echivalentă cu propoziția* Z'.

Este suficient să arătăm că axioma lui Zermelo implică propoziția Z'. Fie $\mathfrak{A} = \{A\}$ o familie de mulțimi disjuncte. Prin ipoteză, există o aplicație

$$\varphi : \mathfrak{P}\left(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A\right) \to \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A,$$

astfel încît $\varphi_A \in A$ pentru orice $A \in \mathfrak{A}$.
Nu avem decît să punem $C = \{\varphi_A\}_{A\in\mathfrak{A}}$.

1.7.4. Un caz particular al produsului cartezian

$$\bigtimes_{i\in I} A_i$$

este cazul în care $A_i = A$ pentru orice $i \in I$.

Atunci produsul cartezian se notează, printr-o extensiune naturală a notației A^n, astfel: A^I.

Definiția simbolului A^I va fi deci: A^I *este mulțimea aplicațiilor lui* I *în* A[1].

Un caz particular important îl constituie mulțimea 2^A, în care am notat, pentru simplicitate, cu 2 o mulțime cu două elemente.

Importanța acestei mulțimi rezultă din următoarea

Teoremă. $\mathfrak{P}(A) \sim 2^A$.

În adevăr, să presupunem, pentru a fixa ideile, că $2 = \{0,1\}$. Atunci 2^A este mulțimea funcțiilor definite pe A și care iau numai două valori, anume *zero* și *unu*.

Fiecărui element $\chi \in 2^A$ îi vom atașa mulțimea

$$A_\chi = \{t : t \in A,\ \chi(t) = 1\}.$$

Reciproc, fiecărei mulțimi $B \subseteq A$ îi putem asocia aplicația $\chi_B : A \to \{0,1\}$, definită în felul următor:

$$\chi_B(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in B, \\ 0 & \text{dacă } t \notin B. \end{cases}$$

Evident, $B = A_\chi$. Funcția χ_B nu este altceva decît funcția caracteristică a mulțimii B.

[1] Condiția ca pentru un element $a_i \in A$ să avem $a_i \in A_i$ este de la sine îndeplinită, deoarece $A_i = A$.

§ 8. ORDONAREA NUMERELOR CARDINALE. OPERAȚII CU NUMERELE CARDINALE

1.8.1. În cele ce urmează, vom nota numărul cardinal din care face parte o mulțime A cu una din notațiile $\overline{\overline{A}}$ sau card A.

Atunci cînd nu este necesar să punem în evidență un element al clasei, vom nota, de obicei, numerele cardinale cu litere minuscule ale alfabetului gotic:

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}, \ldots$$

Vom spune că între numerele cardinale $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ avem relația

$$\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n},$$

(citit: $\mathfrak{m}$ mai mic decît $\mathfrak{n}$) dacă pentru $A \in \mathfrak{m}$ și $B \in \mathfrak{n}$ există $B_1 \subseteq B$ cu proprietatea $A \sim B_1$.

Definiția dată implică independența sa de elementele A, B alese în clasele respective $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. Să verificăm acest lucru.

Fie $A' \in \mathfrak{m}$, $B' \in \mathfrak{n}$, cu $A' \neq A$, $B' \neq B$.

Prin ipoteză,

$$A' \sim A, \quad B' \sim B.$$

Există deci o bijecție f între B și B'. Restricția f/B_1 va fi o bijecție între B_1 și o anumită parte B_1' a lui B'. Altfel spus, $B_1' \sim B_1$. Dar $B_1 \sim A$ și $A \sim A'$, deci $B_1' \sim A'$.

Se poate verifica ușor că relația „$\leqq$" astfel definită este tranzitivă (exercițiu !). Deci această relație este o relație de ordine. Ea este și reflexivă. În adevăr, din definiție rezultă că $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{m}$ pentru orice cardinal $\mathfrak{m}$.

Teorema lui Felix Bernstein: *Dacă* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ *și* $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$ *atunci* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.[1]

Fie $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$, f bijecția $A \to B_1$, $(B_1 \subseteq B)$ și g bijecția $B \to A_1$, $(A_1 \subseteq A)$.

Să punem $g(B_1) = A$. Din $B_1 \subseteq B$ deducem $A_2 \subseteq g(B) = A_1$. Așadar

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2,$$

iar, pe de altă parte,

$$A_2 = (g \circ f)(A).$$

Cum $g \circ f$ este o bijecție, rezultă că $A \sim A_2$.

[1] G. Cantor, fondatorul teoriei mulțimilor, a considerat această proprietate ca evidentă. Acesta este, poate, motivul pentru care unii autori numesc această teoremă „teorema lui Cantor-Bernstein".

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că am reușit să arătăm că $A \sim A_1$. Atunci, din $A_1 \sim B$ deducem $A \sim B$, adică $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Deci totul revine la a demonstra următoarea propoziție:

Dacă

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2$$

și $A \sim A_2$, atunci $A \sim A_1$.

Prin ipoteză, există o bijecție $f: A \to A_2$. Pentru a nu încărca scrierea, vom nota tot cu f restricția lui f la diversele părți ale lui A. În asemenea condiții, vom defini recurent șirul $\{A_n\}_{n \in N}$ de mulțimi astfel

$$f(A_n) = A_{n+2}, \; n = 1, 2, \ldots$$

Vom arăta că acest șir este descendent. În adevăr,

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2.$$

Să presupunem deci că

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n.$$

Vom arăta că $A_n \supseteq A_{n+1}$. În adevăr, din

$$A_{n-2} \supseteq A_{n-1}$$

deducem

$$f(A_{n-2}) \supseteq f(A_{n-1}),$$

adică

$$A_n \supseteq A_{n+1}.$$

În asemenea condiții, punînd

$$E = \bigcap_{n \in N} A_n,$$

avem descompunerile

$$A = E \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n - A_{n+1}), \qquad (A_0 = A),$$

$$A_1 = E \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_{n+2}).$$

Din $A_n \sim A_{n+2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, deducem

$$A_n - A_{n+1} \sim A_{n+2} - A_{n+3}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vom putea deci defini o bijecție $g: A \to A_1$ în modul următor:

$$g(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in E, \\ f(x), \text{ dacă } x \in A_{2n} - A_{2n+1} & n = 0, 1, 2, \ldots \\ x, \text{ dacă } x \in A_{2n-1} - A_{2n}, & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in E. \\ f^{-1}(x), \text{ dacă } x \in A_{2n} - A_{2n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \\ x, \text{ dacă } x \in A_{2n-1} - A_{2n} \qquad N = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Deci $A \sim A_1$ și teorema este demonstrată.

1.8.2. Vom spune că între numerele cardinale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, avem relația $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ (citit: $\mathfrak{a}$ strict mai mic decît $\mathfrak{b}$) dacă pentru $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$, există $B_1 \subseteq B$ cu proprietatea $A \sim B_1$, dar nu există nici o parte A_1 a lui A astfel încît $A_1 \sim B$.

Din teorema lui Felix Bernstein rezultă că $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ este echivalentă cu ansamblul relațiilor $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ și $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$.

Exercițiu. Să se arate că mulțimile (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ sînt echipotente.

R: Se va aplica teorema lui Felix Bernstein, tradusă în limbajul teoriei mulțimilor.

1.8.3. Este natural să ne întrebăm dacă relația de ordine „$\leqq$" definită pentru numerele cardinale este o relație de ordine totală sau parțială. Răspunsul la această întrebare ne este dat de următoarea.

Teoremă. *Dacă* $\mathfrak{a}$ *și* $\mathfrak{b}$ *sînt numere cardinale, atunci* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ *sau* $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$.

Fie, în adevăr, $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$, altfel arbitrare și

$$X \subseteq A, \; Y \subseteq B.$$

Vom nota cu $\Phi(X, Y)$ familia tuturor bijecțiilor $X \to Y$ și vom pune

$$\mathfrak{F} = \{\Phi(X, Y)\}_{\substack{X \subseteq A \\ Y \subseteq B}}.$$

În mulțimea $\mathfrak{F}$ vom stabili o relație de ordine „$<$" în felul următor: dacă $f \in \mathfrak{F}$, $f' \in \mathfrak{F}$, vom spune că $f < f'$ dacă f' este o prelungire a lui f.

Se vede imediat că orice parte $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ total ordonată a lui $\mathfrak{F}$ este majorată de bijecția $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \to B$. În baza axiomei lui Zorn, rezultă că $\mathfrak{F}$ posedă un element maximal f_0. Aceasta înseamnă că f_0 nu mai poate fi prelungită. Deci, dacă $f_0 : X_0 \to Y_0$, atunci:

1° sau $X_0 = A$ și $Y_0 \subseteq B$, de unde $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$;
2° sau $X_0 \subseteq A$ și $Y_0 = B$, de unde $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$.

Așadar, relația „$\leqq$" ordonează total numerele cardinale.

1.8.4. Teorema ce urmează ne permite să construim, începînd de la un număr cardinal transfinit dat (de exemplu $\aleph_0$, sau $\mathfrak{c}$), un șir infinit de numere cardinale transfinite.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă. *Fiind dat un număr cardinal* $\mathfrak{a}$, *există un număr cardinal* $\mathfrak{b}$, *astfel încît* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$.

În adevăr, fie $A \in \mathfrak{a}$ și $B = A^A$.

Să notăm cu B_1 submulțimea aplicațiilor *constante* din B. Evident $B_1 \sim A$, deci notînd cu $\mathfrak{b}$ clasa de echivalență căreia îi aparține mulțimea B, avem $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$.

Rămîne de arătat că nu putem avea $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Să presupunem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Există deci o bijecție $h : A \to A$ care face să corespundă fiecărui element $x \in A$ elementul $g_x \in A^A$. Să considerăm acum un element $f \in A^A$, supus la singura condiție

$$f(x) \neq g_x(x), \quad x \in A.$$

Dar f este, prin ipoteză, un element al familiei $\{g_x\}_{x \in A}$. Există deci $y \in A$ cu proprietatea

$$f = g_y,$$

de unde

$$f(y) = g_y(y),$$

ceea ce contrazice definiția lui f. Așadar $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, de unde $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$.

Exerciții: 1° Să se arate că $\aleph_0$ este cel mai mic număr cardinal transfinit.

R: Se vor aplica definiția și teorema 1 din 1.4.3.

2°. Să se arate că $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

R: În adevăr, $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$.

1.8.5. Fiind date mulțimile disjuncte A, B, prin definiție

$$\text{card } A + \text{card } B = \text{card } (A \cup B).$$

Pentru o familie $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de mulțimi disjuncte, prin definiție

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \text{card } A_\gamma = \text{card} \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right).$$

Adunarea astfel definită este *comutativă* și *asociativă* (exercițiu!)

Exerciții: 1° $n + \aleph_0 = \aleph_0$, oricare ar fi numărul cardinal finit n.

2° $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

3° $\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots\ldots = \aleph_0$.

4° $\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$.

5° $\mathfrak{c} + n = \mathfrak{c}$, oricare ar fi numărul cardinal finit n.

6° $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.8.6. Fiind date mulțimile A, B, *disjuncte sau nu*, prin definiție

$$\text{card } A.\ \text{card } B = \text{card } (A \times B).$$

Din definiție rezultă

$$\text{card } A \cdot \text{card } B = \text{card } B \cdot \text{card } A.$$

De asemenea, din echivalența

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C),$$

unde A, B, C sînt trei mulțimi arbitrare, rezultă proprietatea de asociativitate a înmulțirii:

$$(\text{card } A \cdot \text{card } B) \cdot \text{card } C = \text{card } A \cdot (\text{card } B \cdot \text{card } C).$$

În sfîrșit, din echivalența

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

rezultă proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare:

$$\text{card } A \cdot (\text{card } B + \text{card } C) = \text{card } A \cdot \text{card } B + \text{card } A \cdot \text{card } C.$$

Dacă $\{A_i\}_{i \in I}$ este o familie oarecare de mulțimi, prin definiție

$$\text{(1)} \qquad \prod_{i \in I} \text{card } A_i = \text{card} \bigtimes_{i \in I} A_i.$$

În particular, dacă $A_i = A$ oricare ar fi $i \in I$, atunci

$$\text{(2)} \qquad \prod_{i \in I} \text{card } A_i = \text{card} \bigtimes_{i \in I} A_i = \text{card } A^I.$$

Teoremă (G. Cantor): $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Este suficient să arătăm că mulțimile $(0,1)$ și $(0,1) \times (0,1)$ sînt echipotente.

Vom defini o bijecție între aceste două mulțimi în felul următor: fie (x_1, x_2) un element al mulțimii a doua, adică o pereche ordonată de numere din $(0,1)$. Utilizînd reprezentarea zecimală, vom avea

$$x_1 = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

$$x_2 = 0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

Elementului (x_1, x_2) îi vom face să corespundă elementul $t \in (0,1)$, dat de următoarea reprezentare zecimală:

$$t = 0,a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n \ldots\ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, unui element t din $(0,1)$

$$t = 0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots$$

îi vom face să corespundă următorul element (x_1, x_2) din $(0,1)\times(0,1)$:

$$x_1 = 0, \ c_1c_3c_5 \ldots\ldots$$
$$x_2 = 0, \ c_2c_4c_6 \ldots\ldots$$

Exerciţii: 1° $n\aleph_0 = \aleph_0$.

2° $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

3° Pentru orice cardinal $\mathfrak{a}$ avem

$$\aleph_0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a} + \ldots\ldots$$

4° $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

5° Dacă $\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{m}$ oricare ar fi $\alpha \in A$, atunci

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{a} = \sum_{\alpha\in A} \mathfrak{m}_\alpha, \quad (\mathfrak{a} = \text{card } A).$$

R: Extensiune a exerciţiului 3°. Fie $E_\alpha \in \mathfrak{m}$, $E_\beta \in \mathfrak{m}$ cu $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ dacă $\alpha \neq \beta$. Mulţimea $E = \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$ este reuniunea elementelor x_α, cu $x_\alpha \in E_\alpha$.

Dacă $E_\alpha \sim M$, oricare ar fi $\alpha \in A$, atunci oricărui x_α îi corespunde, în mulţimea M, un z şi reciproc: oricărui $z \in M$ îi corespunde, *în mulţimea* E, un $x_{\alpha'}$.

Altfel spus: există o bijecţie între E şi $M \times A$, de unde egalitatea

1.3.6. Fie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ două numere cardinale, $A \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$. Prin definiţie

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \text{card } (A^B).$$

Pentru ca această definiţie să fie corectă, trebuie să arătăm că dacă $A \in \mathfrak{a}$, $A' \in \mathfrak{a}$, $B \in \mathfrak{b}$, $B' \in \mathfrak{b}$, atunci

$$A^B \sim A'^{B'}.$$

Vom defini o bijecţie $A^B \to A'^{B'}$ după următoarea schemă, în care ţinem seama că $A \sim A'$, $B \sim B'$:

$$\begin{array}{ccc} B & \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} & B' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ A & \underset{\psi^{-1}}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} & A' \end{array}$$

Potrivit acestei scheme, vom avea

$$f' = \psi \circ f \circ \varphi^{-1},$$
$$f = \psi^{-1} \circ f' \circ \varphi.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $A^B \sim A'^{B'}$ şi definiţia noastră este consistentă. Din formula (2), precum şi din definiţia produsului cartezian, rezultă că avem

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \prod_B \mathfrak{a}.$$

În particular

$$\mathfrak{a}^{\aleph_0} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \ldots$$

Teoremă. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

În adevăr, dacă N este o mulţime numerabilă, de exemplu şirul numerelor naturale, şi $\mathbf{R}$ dreapta numerică, egalitatea precedentă revine la

$$2^N \sim \mathbf{R}.$$

Mulţimea valorilor unei injecţii $N \to \{0,1\}$ poate fi scrisă ca un şir numeric

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

în care fiecare număr este zero sau unu.

Putem face ca acestui şir să-i corespundă numărul $t \in [0,1]$ reprezentat de formula

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

Reciproc, orice număr $t \in [0,1]$ poate fi scris, în sistemul *binar*, astfel

$$t = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

adică

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

Vom face ca acestuia să-i corespundă şirul

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

care defineşte o injecţie $N \to \{0,1\}$.

Exerciţii: 1° $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$.

2° $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}$.

3° $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație: Aici $\mathfrak{c}$ nu reprezintă neapărat card **R**.

4° $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, ($\mathfrak{c}$ = card **R**).

R: Se va ține seama de teorema precedentă și de ex. 3°.

5° Fie $\mathfrak{K}$ mulțimea funcțiilor caracteristice de mulțimi ale dreptei. Să se arate că

$$\text{card } \mathfrak{K} > \mathfrak{c}$$

(inegalitate strictă).

R: Evident card $\mathfrak{K} = 2^{\mathfrak{c}}$. Știm (1.8.4.) că $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Dar

$$\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Deci $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$.

Din demonstrație rezultă că mulțimea considerată este echipotentă cu mulțimea tuturor funcțiilor reale de o variabilă reală.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

ELEMENTE DE TOPOLOGIE GENERALĂ

§ 1. NOȚIUNEA DE SPAȚIU TOPOLOGIC

2.1.1. O *topologie* asupra unei mulțimi nevide X este, prin definiție, o familie $\mathcal{T}$ de mulțimi care se bucură de următoarele trei proprietăți:

D_1. Intersecția a două elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$.

D_2. Oricare reuniune de elemente din $\mathcal{T}$ este un element din $\mathcal{T}$.

D_3. $X \in \mathcal{T}$ și $\emptyset \in \mathcal{T}$.

Mulțimea X se numește spațiul topologiei $\mathcal{T}$.

Perechea $(X, \mathcal{T})$ este, prin definiție, un *spațiu topologic*.

Atunci cînd nici o confuzie nu este posibilă, nu vom mai menționa și topologia, ci numai spațiul, spunînd: „X este un spațiu topologic."

Mulțimile topologiei $\mathcal{T}$ se numesc mulțimi *deschise* ale spațiului $(X, \mathcal{T})$. X este o mulțime deschisă și tot astfel mulțimea vidă este o mulțime deschisă[1].

Într-o mulțime se pot introduce diverse topologii. Cea mai simplă este topologia formată din mulțimea X însăși și din mulțimea vidă. Această topologie se numește uneori topologia *indiscretă* sau *grosieră*.

Un alt exemplu de topologie îl constituie familia *tuturor* părților lui X. Această topologie se numește topologia *discretă*.

Un al treilea exemplu de topologie, mai puțin simplu, se obține luînd drept elemente ale lui $\mathcal{T}$ complementarele de mulțimi finite din X, mulțimea X și mulțimea vidă. Să verificăm că familia astfel construită

---

[1] Din ce în ce mai mult se utilizează expresia „deschisă", omițîndu-se cuvîntul „mulțime". Tot astfel, în evoluția vocabularului matematic, „linia dreaptă" și „linia curbă" au devenit pur și simplu „dreaptă" și „curbă".

îndeplinește condițiile D_1, D_2, D_3. Condiția D_3 este verificată prin alegerea făcută. Fie, acum $G_1, \in \mathcal{T}$, $G_2 \in \mathcal{T}$. Deci

$$\mathbf{C}G_1 = F_1, \quad \mathbf{C}G_2 = F_2,$$

unde F_1 și F_2 sînt mulțimi finite.

Dar

$\mathbf{C}(G_1 \cap G_2) = \mathbf{C}G_1 \cup \mathbf{C}G_2 = F_1 \cup F_2 = F =$ mulțime finită, deci D_1 este verificată.

Să considerăm, în sfîrșit, o familie $\{G_i\}_{i \in I}$ de elemente din X. Avem, pentru orice $i \in I$

$$\mathbf{C}G_i = F_i,$$

unde F_i este o mulțime finită, de unde, aplicînd una din formulele lui De Morgan,

$$\mathbf{C} \bigcup_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \in I} \mathbf{C}\, G_i = \bigcap_{i \in I} F_i,$$

deci $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$ și $\mathcal{T}$ este o topologie asupra lui X.

Vom utiliza mai tîrziu aceste trei exemple de topologii.

2.1.2. Fie $x \in X$. O mulțime V este, prin definiție, *o vecinătate* a punctului x, dacă V conține o mulțime deschisă căreia îi aparține x.

Din definiția dată rezultă imediat următoarele proprietăți:

V_1. *Orice punct $x \in X$ are o vecinătate.*

Într-adevăr, X este o vecinătate pentru oricare din punctele sale.

V_2. *Dacă V este o vecinătate a punctului x și $U \supset V$, atunci U este o vecinătate a lui x.*

(Mai concis: Orice „supramulțime" a unei vecinătăți este o vecinătate.)

V_3. *Dacă V' și V'' sînt două vecinătăți ale lui x, atunci $V' \cap V''$ este o vecinătate a lui x.*

În adevăr, fie respectiv $G' \subseteq V'$ și $G'' \subseteq V''$ mulțimile deschise astfel încît $x \in G'$, $x \in G''$.

Rezultă că $x \in G' \cap G''$. Dar $G' \cap G''$ este o mulțime deschisă și $G' \cap G'' \subseteq V' \cap V''$.

V_4. *Dacă V este o vecinătate a lui x, există o parte $G \subseteq V$, astfel încît V este o vecinătate a oricărui punct din G.*

Mulțimea G din enunț nu este altceva decît mulțimea deschisă din definiția lui V.

2.1.3. Este important de ştiut că proprietăţile V_1, V_2, V_3, V_4 sînt suficiente pentru a defini o topologie $\mathcal{T}$ în felul următor:[1]

Teoremă. *Să presupunem că ataşăm fiecărui punct x al mulţimii X o familie $\mathcal{V}_x$ de mulţimi, numite vecinătăţi ale punctului x, care conţin punctul x, avînd proprietăţile V_1, V_2, V_3, V_4. Subfamilia $\mathcal{T}$ a acelor mulţimi din familia $\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ care sînt vecinătăţi pentru orice punct al lor constituie o topologie pentru X, în care familia vecinătăţilor unui punct x, în sensul definiţiei iniţiale, este familia $\mathcal{V}_x$.*

În adevăr, fie $\{V_i\}_{i\in I}$ o familie de mulţimi din $\mathcal{T}$. Dacă $x\in\bigcup_{i\in I} V_i$, altfel arbitrar, există un indice $j\in I$ pentru care $x\in V_j$. Dar V_j este, prin definiţie, vecinătate pentru orice punct al său şi în particular pentru x.

Cu atît mai mult, în baza condiţiei V_2, $\bigcup_{i\in I} V_i$ va fi o vecinătate a lui x, de unde

$$\bigcup_{i\in I} V_i\in\mathcal{T}.$$

Să presupunem acum că $V'\in\mathcal{T}$, $V''\in\mathcal{T}$.

Dacă $x\in V'\cap V''$, atunci simultan $x\in V'$, $x\in V''$. Dar, prin ipoteza făcută asupra lui $\mathcal{T}$, V' şi V'' sînt vecinătăţi ale punctului x. Deci $V'\cap V''$ este o vecinătate a acestui punct (condiţia V_3). Cum x este arbitrar în $V'\cap V''$, rezultă

$$V'\cap V''\in\mathcal{T}.$$

Cum X conţine orice vecinătate a unui punct oarecare x al său, rezultă că X este o vecinătate pentru orice punct al său, deci $X\in\mathcal{T}$. Aşadar $\mathcal{T}$ este o topologie asupra lui X.

Să considerăm, în această topologie, familia vecinătăţilor unui punct x. Am arătat, în **2.1.2.** că această familie verifică proprietăţile V_1, V_2, V_3, V_4: deci este o familie $\mathcal{V}_x$. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

2.1.4. Observăm că din definiţia unei vecinătăţi rezultă că o mulţime deschisă este o vecinătate pentru orice punct al ei. Vom vedea că această proprietate caracterizează mulţimile deschise.

Teoremă. *O mulţime A este deschisă dacă şi numai dacă A este o vecinătate pentru orice punct al ei.*

---

[1] Cel care a introdus spaţiile topologice în ştiinţă cu ajutorul vecinătăţilor a fost *M. Fréchet*. Proprietăţile enumerate de *Fréchet* nu coincid cu proprietăţile V_1, V_2, V_3, V_4 din text, din cauză că vecinătăţile erau pentru Fréchet mulţimi *deschise*.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că A este vecinătate a oricărui punct al ei. Atunci, pentru orice punct $x \in A$ există o mulțime deschisă G_x, astfel încît

$$x \in G_x \subseteq A.$$

Evident

$$A = \bigcup_{x \in A} G_x$$

și A este o mulțime deschisă.

2.1.5. Orice mulțime F de forma $\complement G$, unde G este deschisă, este, prin definiție, o mulțime *închisă*. Din formulele lui De Morgan rezultă că reuniunea a două mulțimi închise este o mulțime închisă și că orice intersecție de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Spațiul X și mulțimea vidă $\emptyset$ sînt mulțimi *închise*, ca complementare ale mulțimilor *deschise* $\emptyset$ și X.

Într-un spațiu înzestrat cu topologia discretă, orice mulțime este în același timp deschisă și închisă.

Un punct $x \in X$ este prin definiție *punct aderent* al unei mulțimi A, dacă *orice* vecinătate a lui x conține un punct din A.

Evident, orice punct $x \in A$ este un punct aderent al acestei mulțimi. De aici rezultă că dacă notăm cu $\overline{A}$ mulțimea punctelor aderente ale lui A, avem $A \subseteq \overline{A}$.

Mulțimea $\overline{A}$ se numește *aderența*, sau *închiderea*, mulțimii A.

Teorema I. *O mulțime F este închisă dacă și numai dacă $F = \overline{F}$.*

În adevăr, dacă $F = \overline{F}$, atunci orice punct $x \notin F$, deci orice punct $x \in \complement F$ este caracterizat prin proprietatea că există cel puțin o vecinătate V_x a acestui punct care conține numai puncte din $\complement F$. Prin urmare $\complement F$ este o vecinătate pentru orice punct al ei, de unde rezultă (2.1.4.) că $\complement F$ este o mulțime deschisă.

Reciproc, dacă F este o mulțime închisă, fie $y \in \overline{F}$. Dacă $y \notin F$, atunci $y \in \complement F$, deci există o vecinătate V_y a lui y care conține numai puncte din $\complement F$ (adică: nici un punct din F). Dar, prin definiție, *orice* vecinătate a lui y (deci și V_y) conține un punct din F. Contradicția obținută arată că $y \in F$, adică $\overline{F} \subseteq F$, de unde $F = \overline{F}$.

Teorema II. *Pentru orice mulțime A avem $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$* (adică: *Închiderea oricărei mulțimi este o mulțime închisă*).

În adevăr, fie $a'' \in \overline{\overline{A}}$. Fie, de asemenea, V o vecinătate arbitrară a lui a''. Prin definiție, există o mulțime deschisă G, astfel încît

$$a'' \in G \subseteq V.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea G este o vecinătate a lui a'', deci conține un punct $a' \in \overline{A}$. Cum G este vecinătatea oricărui punct al ei, în particular a lui a', rezultă că G conține un punct $a \in A$. În rezumat: Orice vecinătate a unui punct $a'' \in \overline{\overline{A}}$ conține un punct $a \in A$, deci $\overline{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$, de unde $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

Exerciții: 1° Dacă G este deschisă și F închisă, atunci $G - F$ este deschisă.

2° $A \subseteq B$ implică $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

3° $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

4° $\bigcup_{n \in N} \overline{A}_n \subseteq \overline{\bigcup_{n \in N} A_n}$; $\overline{\bigcap_{n \in N} A_n} \subseteq \bigcap_{n \in N} \overline{A}_n$.

5° Fie $c : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ o aplicație verificînd următoarele condiții (axiomele lui C. Kuratowski):

K_1: $c(\emptyset) = \emptyset$; K_2: $A \subseteq c(A)$, pentru orice A;

K_3: $(c \circ c)(A) = c(A)$, pentru orice A;

K_4: $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$, pentru orice A și orice B.

Să se arate că familia $\mathcal{T}$ a complementarelor mulțimilor pentru care $A = c(A)$ formează o topologie pentru X. În această topologie $c(A) = \overline{A}$.

2.1.6. Un punct $x \in X$ este, prin definiție, un *punct de acumulare*[1] pentru o parte $A \subseteq X$ dacă pentru orice vecinătate V_x a lui x, mulțimea $V_x - \{x\}$ conține un punct din A. Cum $V_x - \{x\} \subseteq V_x$, rezultă că orice punct de acumulare al mulțimii A este un punct aderent al acestei mulțimi.

Afirmația reciprocă nu este adevărată. Este suficient să considerăm cazul $X = R$ cu topologia obișnuită, și $A = N$. Orice număr natural este un punct aderent al mulțimii N, dar nu este punct de acumulare al acestei mulțimi.

Acest exemplu ne conduce la noțiunea de punct *izolat* al unei mulțimi A. Un punct $x \in A$ este un punct *izolat* al acestei mulțimi dacă există o vecinătate V a acestui punct, astfel încît $V \cap A = \{x\}$.

Exemplul precedent ne arată că există mulțimi formate numai din puncte izolate.

Mulțimea punctelor de acumulare ale unei mulțimi A se numește *mulțimea derivată* a acesteia și se notează A' sau A^1.

Din observația făcută mai sus rezultă că pentru orice mulțime A avem $A' \subseteq \overline{A}$.

[1] Altă denumire, încă în uz: punct-limită.

Deducem

$$A \cup A' \subseteq \bar{A}.$$

Incluziunea opusă este evidentă, de unde descompunerea importantă:

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

Teoremă. *O mulţimea F este închisă dacă şi numai dacă $F' \subseteq F$.*

În adevăr, fie F închisă şi $x \in F'$. Dacă $x \notin F$, atunci $x \in \complement F = G$, deci există o vecinătate a lui x, anume chiar G, care nu conţine nici un punct din F, ceea ce contrazice definiţia lui F'. Aşadar $x \in F$.

Reciproc, dacă $F' \subseteq F$, atunci $F \cup F' \subseteq F$, adică $\bar{F} \subseteq F$, de unde $F = \bar{F}$ şi F este o mulţime închisă (2.1.5.).

Exerciţii: 1° Aderenţa unei mulţimi este intersecţia tuturor mulţimilor închise care conţin această mulţime.

2° În topologia discretă, nici un punct al spaţiului nu poate fi punct de acumulare pentru vreo mulţime a spaţiului.

3° În topologia grosieră, orice punct x al spaţiului este punct de acumulare pentru orice mulţime a spaţiului (afară de mulţimea vidă şi de mulţimea $\{x\}$).

2.1.7. Un punct $x \in X$ este, prin definiţie, punct *interior* pentru mulţimea A dacă A este o vecinătate a lui x.

Mulţimea punctelor interioare ale unei mulţimi A se notează Int A, sau $\mathring{A}$.

Din definiţie rezultă că o mulţime deschisă G este caracterizată de proprietatea de a fi formată numai din puncte interioare. Deci, dacă $G \subseteq A$, atunci $G \subseteq \text{Int } A$.

Cum orice punct $x \in \text{Int } A$ este astfel încît există o mulţime deschisă G_x cu proprietatea

$$x \in G_x \subseteq A,$$

rezultă, în definitiv, că

$$\text{Int } A = \bigcup \{G : G \subseteq A,\ G \in \mathfrak{T}\}.$$

Deci Int A este o mulţime deschisă (eventual vidă).

Dacă A este o parte a lui X, mulţimea Int $\complement A$ se numeşte *exteriorul* lui A şi se notează Ext A. Din raţionamentul de mai sus rezultă că Ext A este o mulţime deschisă (eventual vidă).

Mulţimea punctelor spaţiului X care nu sînt nici interioare nici exterioare unei părţi date A constituie, prin definiţie, *frontiera* lui A şi se notează $\text{Fr}A$. Orice punct al acestei mulţimi se numeşte *punct-frontieră* al

lui A. El poate fi caracterizat prin proprietatea că orice vecinătate a sa conține și puncte din A și puncte din $\complement A$. Evident, pentru orice mulțime $A \subseteq X$ avem

$$X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Ext}A \cup \mathrm{Fr}A.$$

Exerciții: 1° Int A este mulțimea punctelor lui A care nu sînt puncte de acumulare pentru $\complement A$.

2° $\mathrm{Int}\,(A \cup B) = \mathrm{Int}\,A \cup \mathrm{Int}\,B$, pentru orice pereche de mulțimi A, B.

3° $A \subseteq B$ implică $\mathrm{Int}\,A \subseteq \mathrm{Int}\,B$.

4° $\mathrm{Fr}\,A = \mathrm{Fr}\,\complement A$, pentru orice mulțime A.

5° $\mathrm{Fr}\,A = A \cap \overline{\complement A}$, pentru orice mulțime A.

Reciproc, dacă $B = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$, atunci $B = \mathrm{Fr}A$.

6° O mulțime A este închisă dacă și numai dacă $\mathrm{Fr}A \subseteq A$.

7° O mulțime A este deschisă dacă și numai dacă $A \cap \mathrm{Fr}\,A = \emptyset$.

8° Pentru orice mulțime A avem

$$\mathrm{Fr}\,A = (A \cap \overline{\complement A}) \cup (\overline{A} \cap \complement A).$$

Observație. Mulțimile $A \cap \overline{\complement A}$ și $\overline{A} \cap \complement A$ se numesc, respectiv, frontiera *interioară* și frontiera *exterioară* a mulțimii A.

9° Într-un spațiu înzestrat cu topologia discretă, orice mulțime are frontiera vidă.

R: Se vor aplica ex. 6° și 7°.

10° $\mathrm{Fr}\,\mathrm{Fr}A \subseteq \mathrm{Fr}A$, pentru orice mulțime A.

2.1.8. O mulțime fără puncte interioare se numește o *mulțime-frontieră*. O mulțime-frontieră A este deci caracterizată prin proprietatee

$$\mathrm{Int}\,A = \emptyset.$$

O mulțime A, a cărei aderență este o mulțime-frontieră, se numește o mulțime *rară*[1].

O mulțime rară este așadar caracterizată prin relația

$$\mathrm{Int}\,\overline{A} = \emptyset.$$

Orice parte a unei mulțimi rare A este o mulțime rară. În adevăr, dacă $B \subseteq A$, atunci $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ (2.1.5., ex. 2°), de unde (2.1.7., ex. 3°)

$$\emptyset \subseteq \mathrm{Int}\,\overline{B} \subseteq \mathrm{Int}\,\overline{A} = \emptyset.$$

Proprietatea următoare ne permite să dăm o altă definiție, foarte utilă în aplicații, mulțimilor rare.

[1] Denumiri mai vechi, rar în uz astăzi: mulțime *nedensă*, mulțime *nicăieri densă*.

Teoremă. *O mulțime A este rară dacă și numai dacă orice mulțime deschisă G conține o parte deschisă G_1, disjunctă de A.*

În adevăr, dacă A este rară, atunci $\overline{A}$ nu conține nici o parte deschisă nevidă. Deci, G fiind o mulțime deschisă oarecare, mulțimea

$$G_1 = G - \overline{A} \subseteq G - A \subseteq G$$

este deschisă, nevidă și disjunctă de A.

Reciproc, dacă A nu este rară, vom arăta că există o mulțime deschisă nevidă G, anume chiar $G = \operatorname{Int} \overline{A}$, astfel încît orice parte deschisă nevidă a lui G întîlnește mulțimea A. Fie, în adevăr, G_1 deschisă și astfel încît

$$\emptyset \subset G_1 \subseteq \operatorname{Int} \overline{A}.$$

Deducem

$$\emptyset \subset G_1 \cap \overline{A}.$$

Fie $x \in G_1 \cap \overline{A}$. *Orice* vecinătate a lui x conține un punct din A. *Există* o vecinătate V a lui x, care conține numai puncte din G_1.

Deci

$$\emptyset \subset G_1 \cap A,$$

adică orice parte deschisă nevidă a mulțimii $G = \operatorname{Int} \overline{A}$ întîlnește mulțimea A.

Consecință. *O reuniune finită de mulțimi rare este o mulțime rară.*

Fie, în adevăr, mulțimile rare

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

În baza teoremei precedente, o mulțime deschisă G fiind dată, există o mulțime deschisă $G_1 \subset G$, disjunctă de A_1, apoi o mulțime deschisă $G_2 \subset G_1$, disjunctă de A_2, deci de $A_1 \cup A_2$ ș.a.m.d.

Repetînd de n ori raționamentul, obținem o mulțime $G_n \subset G$, disjunctă de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

2.1.9. O reuniune numerabilă de mulțimi rare poate să nu mai fie o mulțime rară. Să considerăm, de exemplu, ca spațiu X dreapta numerică $\mathbf{R}$ cu topologia obișnuită și mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale, ordonate într-un șir

$$\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}.$$

Dacă punem

$$\mathbf{Q}_n = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$$

mulțimile $Q_1, Q_2, \ldots$ sînt vizibil rare, dar mulțimea

$$\mathbf{Q} = \bigcup_{n \in N} \mathbf{Q}_n$$

nu este rară, deoarece $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

Reuniunile numerabile de mulțimi rare apar în numeroase probleme de teoria funcțiilor sau de analiză funcțională. René Baire, care le-a introdus în știință, le-a numit mulțimi de *prima categorie*. Unii autori le numesc, astăzi, mulțimi *slabe*.

O mulțime care *nu* este de prima categorie se numește (tot după R. Baire) o *mulțime de categoria a doua*.

Complementara unei mulțimi de prima categorie se numește (după A. Denjoy) un *rezidual*.

O altă noțiune importantă de care vom avea nevoie este noțiuneade mulțime *densă*.

Prin definiție, o mulțime A este densă în raport cu o altă mulțime B, dacă $\bar{A} \supseteq B$.

În particular, o mulțime A este densă în spațiul X dacă $\bar{A} = X$.

Exemple: 1° Pe dreapta numerică R, cu topologia obișnuită, mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale este densă, deoarece $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

2° În planul euclidian $\mathbf{R}^2$, cu topologia obișnuită, mulțimea $\mathbf{Q}^2$ a punctelor de coordonate raționale este densă, deoarece $\bar{\mathbf{Q}}^2 = \mathbf{R}^2$.

§ 2. BAZĂ. SPAȚII CU BAZĂ NUMERABILĂ

2.2.1. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic.

O familie $\mathcal{B}$ de părți deschise ale acestui spațiu este, prin definiție, *o bază* pentru topologia $\mathcal{T}$ dacă orice element din $\mathcal{T}$ este o reuniune de elemente din $\mathcal{B}$.

O definiție echivalentă este dată de următoarea:

Teoremă. *O familie $\mathcal{B}$ de părți deschise ale lui $(X, \mathcal{T})$ este o bază pentru acest spațiu dacă și numai dacă pentru orice pereche (x, V_x), unde V_x este o vecinătate a lui x, există un element $B_x \in \mathcal{B}$ astfel încît*

$$x \in B_x \subseteq V_x.$$

Fie, în adevăr, $\mathcal{B}$ o bază pentru $(X, \mathcal{T})$.
Evident, Int $V_x \in \mathcal{T}$, deci Int V_x este reuniunea unei subfamilii de mulțimi din $\mathcal{B}$. Există deci $B_x \in \mathcal{B}$, astfel încît

$$x \in B_x \subseteq \text{Int } V_x \subseteq V_x. \P$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice pereche (x, V_x) există o mulțime $B_x \in \mathcal{B}$, astfel încît[1]

$$x \in B_x \subseteq \text{Int } V_x \subseteq V_x.$$

Fie, acum, G o mulțime deschisă oarecare. Această mulțime este vecinătate a *oricărui* punct x al ei.

[1] B_x fiind o mulțime *deschisă* inclusă în V_x, este în consecință inclusă în Int V_x.

Scanned with OKEN Scanner

Deci perechii (x, G) îi corespunde o mulţime $B_x \in \mathfrak{B}$ astfel încît

$$x \in B_x \subseteq G.$$

Deducem imediat

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x.$$

Exerciţii: 1° Fie X, cu proprietăţile:

1° $\bigcup\{B : B \in \mathfrak{B}\} = X$.

2° Intersecţia a două mulţimi din $\mathfrak{B}$ este o reuniune de mulţimi din $\mathfrak{B}$.

3° Să notăm cu $\mathfrak{T}$ familia tuturor părţilor lui X care sînt reuniuni de mulţimi din $\mathfrak{B}$.

Să se arate că $\mathfrak{T}$ este o topologie pentru X.

R: În primul rînd, $X \in \mathfrak{T}$, $\emptyset \in \mathfrak{T}$.
În al doilea rînd, o reuniune de reuniuni de mulţimi din $\mathfrak{B}$ este o reuniune de mulţimi din $\mathfrak{B}$.

În al treilea rînd, fie $G' \in \mathfrak{T}$, $G'' \in \mathfrak{T}$.

Deci $G' = \bigcup_{i \in I} B_i$, $G'' = \bigcup_{j \in J} B_j$. Vom avea

$$G' \cap G'' = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (B_i \cap B_j) \in \mathfrak{B}.$$

2° Mulţimea intervalelor dreptei $\mathbf{R}$ constituie, pentru $\mathbf{R}$, o bază în topologia obişnuită.

R: Se vor aplica ex. precedent şi proprietatea de structură a mulţimilor lineare deschise.

2.2.2. Un spaţiu topologic $(X, \mathfrak{T})$ este *separabil* (sau: *de tip numerabil*[1]) dacă există o parte numerabilă $D \subseteq X$, densă în X.

Exemple: Dreapta numerică $\mathbf{R}$, cu topologia obişnuită, este un spaţiu de tip numerabil, deoarece mulţimea Q a numerelor raţionale este numerabilă şi avem $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

La fel, planul $\mathbf{R}^2$ şi spaţiul $\mathbf{R}^3$, cu topologiile respective obişnuite, sînt spaţii de tip numerabil.

Teoremă. *Orice spaţiu cu bază numerabilă este de tip numerabil.*

Fie $\mathfrak{B} = \{B_n\}_{n \in N}$ o bază-numerabilă a spaţiului $(X, \mathfrak{T})$ şi

$$x_n \in B_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

[1] Adjectivul „separabil" a fost introdus de M. Fréchet (1906), care a introdus şi conceptul corespunzător. Deşi adjectivul nu caracterizează noţiunea, a rămas pînă în zilele noastre; denumirea mai raţională (deşi mai lungă) de *spaţiu de tip numerabil* pare să cîştige tot mai mult teren.

Scanned with OKEN Scanner

Să punem

$$D = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

Vom arăta că $\overline{D} = X$. În adevăr, în caz contrar mulțimea $G = X - \overline{D}$ ar fi deschisă, nevidă și disjunctă de $\overline{D}$, deci cu atît mai mult disjunctă de D. Pe de altă parte, am avea

$$G = \bigcup_{n \in N} B_{k_n},$$

deci

$$G \supseteq \{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots\},$$

de unde $G \cap D \supset \emptyset$, ceea ce contrazice ipoteza.

Așadar, $\overline{D} = A$.

Observație importantă. Reciproca propoziției precedente nu *este adevărată. Adică: Nu orice spațiu de tip numerabil are o bază numerabilă.*

Să considerăm, de exemplu, spațiul $(X, \mathcal{T})$ în care $\mathcal{T}$ este formată din complementarele de mulțimi finite, din X și din mulțimea vidă. Vom mai presupune mulțimea X nenumerabilă (adică: card $X > \aleph_0$). O parte infinită oarecare A a lui X intersectează toate mulțimile deschise din X. Deci orice punct $x \in X$ este punct aderent pentru A, de unde $\overline{A} = X$.

În particular, pentru o parte numerabilă $D \subset X$ vom avea $\overline{D} = X$, deci X este de tip numerabil.

Vom arăta că X nu are o bază numerabilă. Să presupunem contrariul: fie, în această ipoteză, $\mathfrak{B} = \{B_n\}_{n \in N}$ baza spațiului. Fie, de asemenea, $x \in X$, altfel arbitrar.

Să notăm cu $\{B_{k_n}\}_{n \in N}$ subfamilia acelor mulțimi din $\mathfrak{B}$ care conțin punctul x.

Mulțimea

$$H_0 = \bigcap_{n \in N} \{B_{k_n} : x \in B_{k_n}\}$$

conține evident punctul x. Se poate arăta că $H_0 = \{x\}$. În adevăr, dacă $x' \neq x$ și $x' \in H_0$, mulțimea $X - \{x'\}$ este deschisă, deci o reuniune de mulțimi din $\mathfrak{B}$:

$$X - \{x'\} = \bigcup_{n \in N} B_{k_n}.$$

Dar cum mulțimea $X - \{x'\}$ conține punctul x, există cel puțin o mulțime B_{k_n} care conține acest punct. Cu alte cuvinte, există un indice n_0 pentru care $k_{n_0} = k_{n_0}$. Cum, pe de altă parte, $x' \notin \bigcup_{n \in N} B_{k_n}$, înseamnă că nici una din mulțimile B_{k_n}, deci nici $B_{k_{n_0}}$, nu conține punctul x'. Deci $x' \notin H_0$.

Dar din

$$\bigcap_{n\in N}\{B_{k_n} : x \in B_{k_n}\} = \{x\}$$

deducem, aplicînd una din formulele lui de Morgan,

$$\bigcup_{n\in N} \mathbf{C}B_{k_n} = X - \{x\},$$

egalitate din care ar rezulta că X este o mulțime cel mult numerabilă, ceea ce este contrar ipotezelor făcute.

Așadar $(X, \mathcal{T})$ nu are o bază numerabilă, deși este de tip numerabil.

2.2.3. Fie A o parte a spațiului $(X, \mathcal{T})$.

Dacă fiecărui punct $a \in A$ facem să-i corespundă o vecinătate V_a, familia

$$\mathcal{V}_A = \{V_a\}_{a\in A}$$

constituie o acoperire a mulțimii A. Dacă vecinătățile V_a sînt, toate, mulțimi *deschise*, atunci familia $\mathcal{V}_A$ constituie, prin definiție, o *acoperire deschisă* a mulțimii A.

Orice familie $\mathcal{V}'_A \subset \mathcal{V}_A$ de mulțimi deschise care constituie o acoperire deschisă a lui A, este, prin definiție, o *subacoperire* a lui $\mathcal{V}_A$.

Cu aceste definiții putem da următoarea importantă *teoremă de acoperire*:

Teorema de acoperire a lui Lindelöf. *Orice acoperire deschisă a unei părți A a unui spațiu X cu bază numerabilă conține o subacoperire deschisă numerabilă.*

În adevăr, fie $\mathcal{A}$ acoperirea deschisă dată. Fiecare element al lui $\mathcal{A}$, ca mulțime deschisă, este o reuniune numerabilă de elemente ale bazei (numerabile) $\mathcal{B}$ a spațiului. Prin urmare, putem acoperi mulțimea A cu o subfamilie $\mathcal{B}'$ a lui $\mathcal{B}$. Dar fiecare element B_{k_n} din $\mathcal{B}'$ face parte din o reuniune care constituie un anumit element din $\mathcal{A}$. Să notăm cu A_{k_n} acest element. Familia

$$\mathcal{A}' = \{A_{k_n}\}_{n\in N}$$

constituie o acoperire deschisă numerabilă a mulțimii A.

Exerciții: 1° Să se arate că orice familie de deschise disjuncte ale unui spațiu cu bază numerabilă este cel mult numerabilă.

R: Fie $\mathcal{G}$ o astfel de familie și $\mathcal{B} = \{B_n\}$ baza numerabilă a spațiului. Fiecare $G \in \mathcal{G}$ este o reuniune de mulțimi din $\mathcal{B}$, deci există un număr natural n (vom lua pe cel mai mic posibil) astfel încît $B_n \subseteq G$.

În acest mod, dacă n corespunde lui G și n' lui G', $G \neq G'$ implică $n \neq n'$. În acest mod, fiecărui $G \in \mathcal{G}$ îi corespunde un număr natural, deci $\mathcal{G}$ este cel mult numerabilă.

2° Să numim spaţiu al lui Lindelöf un spaţiu topologic cu proprietatea următoare: Orice acoperire deschisă a acestui spaţiu conţine o subacoperire numerabilă. Să se arate că orice parte închisă a unui spaţiu Lindelöf este (cu topologia indusă) un spaţiu Lindelöf.

R: Fie $(X, \mathcal{T})$ spaţiul considerat, Y o parte închisă a sa, $\mathcal{U}$ topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe Y.
Fie $\mathcal{G}$ o acoperire deschisă a lui Y.
$\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \cup \complement Y$ constituie o acoperire deschisă a lui $(X, \mathcal{T})$, care conţine o subacoperire numerabilă.

§ 3. RELATIVIZARE. CONEXIUNE

2.3.1. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $Y \subset X$. Vom pune

$$\mathcal{U} = \mathcal{T} \cap Y = \{G \cap Y : G \in \mathcal{T}\}.$$

Este uşor de verificat că $\mathcal{U}$ constituie o topologie pentru Y. În adevăr, fie $\{U_i\}_{i \in I}$ o familie de elemente din $\mathcal{U}$. Avem, pentru orice $i \in I$,

$$U_i = G_i \cap Y, \text{ cu } G_i \in \mathcal{T},$$

de unde

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} G_i \cap Y = Y \cap \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{U}.$$

La fel, dacă $U_1 = G_1 \cap Y$ şi $U_2 = G_2 \cap Y$ sînt elemente din $\mathcal{U}$, avem

$$U_1 \cap U_2 = (G_1 \cap Y) \cap (G_2 \cap Y) = (G_1 \cap G_2) \cap Y \in \mathcal{U}.$$

În sfîrşit

$$\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{U}, \quad Y = X \cap Y \in \mathcal{U}.$$

Topologia $\mathcal{U}$ se numeşte *relativizarea* topologiei $\mathcal{T}$ la mulţimea Y sau încă topologia *indusă* de $\mathcal{T}$ pe mulţime Y.

Spaţiul topologic $(Y, \mathcal{U})$ se numeşte un *subspaţiu* al lui $(X, \mathcal{T})$.
În acest spaţiu, o mulţime A este *închisă* dacă $Y - A \in \mathcal{U}$.

Teoremă. *O mulţime $A \subseteq Y$ este închisă (în raport cu Y) dacă şi numai dacă A este intersecţia lui Y cu o mulţime închisă.*

În adevăr, fie

$$A = Y \cap F,$$

unde F este o mulţime închisă. Putem scrie

$$A = Y \cap \complement G = Y - G = Y - Y \cap G,$$

deci A este închisă în raport cu Y.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă $A = Y - G \cap Y$, putem scrie

$$A = Y - G = Y \cap \complement G = Y \cap F,$$

unde F este o mulțime închisă.

Exercițiu: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, Y' și Y'' două părți nedisjuncte ale lui X, $\mathcal{U}'$ și $\mathcal{U}''$ topologiile respective induse de $\mathcal{T}$. Care este topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe mulțimea $Y' \cap Y''$?

2.3.2. Vom spune că două mulțimi A, B din X sînt *separate* dacă

$$A \cap \bar{B} = \emptyset, \quad \bar{A} \cap B = \emptyset.$$

Condițiile scrise sînt echivalente cu următoarele:

$$A \cap B = \emptyset, \ A \cap B' = \emptyset, \ A' \cap B = \emptyset.$$

Deci două mulțimi separate sînt neapărat disjuncte.
Dar două mulțimi pot fi disjuncte fără să fie separate.

Exemplu: Fie $X = R$. Dacă $A = (0,1)$, $B = [1,2)$, mulțimile A, B sînt disjuncte, dar *nu* sînt separate, deoarece $A' \cap B = \{1\}$.

Să considerăm două mulțimi separate nevide A, B, să punem $A \cup B = Y$ și să notăm cu $\mathcal{U}$ topologia indusă pe Y de $\mathcal{T}$. Să punem, mai departe

$$\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y, \ \bar{B}_Y = \bar{B} \cap Y.$$

Avem

$$\bar{A}_Y = \bar{A} \cap (A \cup B) = \bar{A} \cap A = A,$$

deci A este închisă în spațiul $(Y, \mathcal{U})$.

La fel, B este o mulțime închisă a spațiului $(Y, \mathcal{U})$.

Reciproc, să presupunem mulțimile A, B nevide, disjuncte, ambele închise în spațiul $(Y, \mathcal{U})$, unde $Y = A \cup B$. Vom arăta că mulțimile A, B sînt separate. În adevăr, prin ipoteză

$$A = F' \cap Y, \ B = F'' \cap Y,$$

unde F', F'' sînt mulțimi închise ale spațiului $(X, \mathcal{T})$. Tot prin ipoteză, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, deci $F' \cap Y \neq \emptyset$, $F'' \cap Y \neq \emptyset$ și

$$F' \cap F'' \cap Y = \emptyset,$$

de unde $F' \cap F'' = \emptyset$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$\overline{B} \subseteq F'' \cap \overline{Y},$$

deducem

$$A \cap \overline{B} \subseteq (F' \cap Y) \cap (F'' \cap \overline{Y}) = F'' \cap F'' \cap Y \cap \overline{Y} = \emptyset,$$

deci $A \cap \overline{B} = \emptyset$. La fel se arată că $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Aşadar:

Două mulţimi nevide A, B sînt separate dacă şi numai dacă aceste mulţimi sînt disjuncte şi fiecare din ele este închisă în raport cu mulţimea $Y = A \cup B$.

Obţinem un enunţ valabil dacă în propoziţia precedentă înlocuim cuvîntul „închisă" prin cuvîntul „deschisă".

2.3.3. Vom spune că un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este *neconex* dacă mulţimea X se poate reprezenta ca reuniunea a două mulţimi separate, nevide.

Un spaţiu care *nu* este neconex se numeşte un spaţiu conex.

Spaţiul topologic discret este neconex.

O parte Y a lui X este neconexă dacă $Y = A \cup B$, unde A, B sînt mulţimi separate, nevide.

O parte Y a lui X, care *nu* este neconexă, este prin definiţie, o *mulţime conexă*.

Din ultima propoziţie rezultă că o mulţime Y este conexă dacă şi numai dacă orice parte A a lui Y care este în acelaşi timp deschisă şi închisă în raport cu $(Y, \mathcal{U})$, este sau mulţimea vidă sau coincide cu Y.

O mulţime conexă maximală[1] a spaţiului X se numeşte o *componentă* (sau încă: o componentă conexă) a acestui spaţiu.

Exemplu: Într-un spaţiu topologic discret, *orice* componentă este compusă din un singur punct.

Teorema I. *Orice parte conexă a unui spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este inclusă în o componentă conexă a acestuia.*

Fie A o parte conexă a spaţiului considerat. Să notăm cu C reuniunea familiei $\mathcal{A}$ a tuturor mulţimilor conexe care conţin mulţimea A.

Va fi suficient să arătăm că C este o mulţime conexă. Fie D o parte a lui C, în acelaşi timp deschisă şi închisă în raport cu C. Atunci, pentru orice $E \in \mathcal{A}$, mulţimea $D \cap E$ este în acelaşi timp închisă şi deschisă în raport cu E. Dar E este conexă. Deci, sau $D \cap E = E$, adică $E \subseteq D$, sau $D \cap E = \emptyset$, adică $E \subseteq C - D$. Aşadar, orice mulţime din $\mathcal{A}$ este inclusă fie în D, fie în $C - D$. Dar două mulţimi E, F din $\mathcal{A}$ nu pot

[1] Subînţeles: în raport cu relaţia de ordine „$\subseteq$".

fi incluse una în D şi alta în $C - D$, deoarece mulţimile D şi $C - D$ fiind separate (2.3.2.) ar rezulta că şi E, F ar fi separate. Deci: sau orice mulţime din $\mathcal{A}$ este inclusă în D, de unde $D = C$, sau orice mulţime din $\mathcal{A}$ este inclusă în $C - D$ şi atunci $D = \emptyset$. Deci C este o mulţime conexă. Prin însuşi modul său de construcţie, este şi maximală. Deci C este o componentă.

Teorema II. *Dacă A este conexă şi*

$$A \subseteq Y \subseteq \overline{A},$$

atunci Y este conexă.

Să presupunem contrariul. Atunci $Y = U \cup V$, unde U şi V sînt separate, nevide. Deducem, prin intersecţia ambilor membri cu A

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V).$$

Dar A este conexă şi mulţimile $A \cap U$, $A \cap V$ sînt separate. Deci una din ele este vidă. Fie

$$A \cap V = \emptyset.$$

Atunci

$$A = A \cap U,$$

de unde $A \subseteq U$, deci $\overline{A} \subseteq \overline{U}$.

Deducem, intersectînd cu V,

$$\overline{A} \cap V \subseteq \overline{U} \cap V = \emptyset,$$

adică

$$\overline{A} \cap V = \emptyset.$$

Pe de altă parte, din incluziunea evidentă $V \subseteq Y \subseteq \overline{A}$ deducem

$$\overline{A} \cap V = V,$$

deci $V = \emptyset$, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Aşadar Y este conexă.

Observaţie. În particular, dacă A este conexă, $\overline{A}$ este conexă.

Teorema III. *Orice componentă este o mulţime închisă.*

În adevăr, fie C o componentă. În baza teoremei precedente, $\overline{C}$ este o mulţime conexă. Pe de o parte $\overline{C} \subseteq C$, deoarece C este o mulţime conexă maximală, iar, pe de altă parte, $C \subseteq \overline{C}$, deci $C = \overline{C}$.

Teorema IV. *Dacă A, B sînt mulţimi conexe neseparate, atunci $A \cup B$ este conexă.*

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, fie $Y = A \cup B$. Vom arăta că orice parte D a lui Y, în același timp deschisă și închisă în raport cu Y este vidă sau coincide cu Y.

Fie D o astfel de mulțime. Atunci $D \cap A$ este în același timp închisă și deschisă în raport cu A; tot astfel $D \cap B$ este în același timp închisă și deschisă în raport cu B. Dar A și B sînt mulțimi conexe. Avem deci de examinat următoarele patru situații posibile:

1^0 $D \cap A = \emptyset$, $\quad D \cap B = \emptyset$;
2^0 $D \cap A = A$, $\quad D \cap B = B$;
3^0 $D \cap A = A$, $\quad D \cap B = \emptyset$;
4^0 $D \cap A = \emptyset$, $\quad D \cap B = B$.

În primul caz deducem $D = \emptyset$. În al doilea caz deducem $D = A \cup B = Y$.

În al treilea caz am avea $A \subseteq D$ și $B \subseteq Y - D$, deci A și B ar fi separate.

În al patrulea caz am avea $A \subseteq Y - D$ și $B \subseteq D$, și mulțimile A și B ar fi iarăși separate.

Deci singurele situații posibile sînt 1^0 și 2^0, din care deducem că $A \cup B$ este conexă.

Consecință importantă: *Două componente distincte ale unui spațiu topologic* $(X, \mathcal{T})$ *sînt separate.*

Fie C_1, C_2 aceste componente. Dacă C_1, C_2 nu ar fi separate, atunci $C_1 \cup C_2$ ar fi o mulțime conexă, conținînd și pe C_1 și pe C_2, care nu ar fi componente conexe.

Exerciții: 1^0 Fie A o mulțime în $(X, \mathcal{T})$. Dacă pentru orice pereche de puncte x, y din A există o mulțime conexă $B \subseteq A$ care conține aceste puncte, atunci A este conexă.

R: Dacă A nu ar fi conexă, ar avea cel puțin două componente conexe, C_1, C_2. Acestea sînt separate.
Orice mulțime conexă $B \subseteq A$ trebuie să fie conținută într-o componentă conexă, de exemplu în C_1. Dacă, acum, $x \in C_1$, $y \in C_2$, nu am putea avea $y \in B$. Deci A este conexă.

2^0 Pe dreapta numerică R sau în planul R^2, cu topologia obișnuită, un segment (sau un interval) este o mulțime conexă.

R: Este suficient să arătăm că R este conexă. Să presupunem că $R = A \cup B$, cu A, B disjuncte, deschise (și în același timp închise). Să presupunem $A \supset \emptyset$ și să considerăm $x \in A$. Există un interval $(x', x'') \subseteq A$, care conține punctul x. Se va arăta, prin reducere la absurd, că mulțimea punctelor x'' nu este mărginită la dreapta și tot așa că mulțimea punctelor x' nu este mărginită la stînga. Deci $A = R$, de unde $B = \emptyset$.

3° În plan sau în spaţiu, orice linie frîntă este o mulţime conexă.

4° Dacă o mulţime conexă A intersectează mulţimile E şi $\mathbf{C}E$, atunci A intersectează şi $Fr\ E$.

R: Avem $A = A \cap X = A \cap (E \cup \mathbf{C}E) = (A \cap E) \cup (A \cap \mathbf{C}E)$. Prin ipoteză, mulţimile $A \cap E$ şi $A \cap \mathbf{C}E$ nu sînt vide. Vom arăta că sînt separate.

În adevăr, $(A \cap E) \cap \overline{(A \cap \mathbf{C}E)} \subseteq (A \cap \bar{E}) \cap \mathbf{C}E = A \cap Fr\ E$ (2.1.7., ex.5°). Deci dacă $A \cap Fr\ E = \emptyset$, atunci $(A \cap E) \cap \overline{(A \cap \mathbf{C}E)} = \emptyset$ şi la fel $\overline{(A \cap E)} \cap (A \cap \mathbf{C}E) = \emptyset$, de unde ar rezulta că A nu este conexă.

5° Planul, spaţiul sînt conexe.

R: Se vor aplica ex. 1° şi 3°.

6° Într-un spaţiu topologic conex $(X, \mathcal{T})$ orice parte nevidă $E \subset X$ are frontiera nevidă.

R: Avem identitatea $X = Int\ E \cup Fr\ E \cup Ext E$.
Dacă $Fr\ E = \emptyset$, am avea descompunerea $X = Int\ E \cap Ext\ E$ şi X nu ar fi conex.

7° Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic conex şi $\mathcal{T}'$ o topologie asupra lui X, astfel încît $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Să se arate că spaţiul $(X, \mathcal{T}')$ este conex.

R: Orice mulţime deschisă în spaţiul $(X, \mathcal{T}')$ este deschisă în spaţiul $(X, \mathcal{T})$.

2.3.4. În plan sau în spaţiu, cu topologia obişnuită, mulţimile deschise şi conexe joacă un rol fundamental. Asemenea mulţimi se numesc *domenii*.

Teorema următoare este foarte importantă în aplicaţii:

Teoremă. *Orice pereche de puncte ale unui domeniu poate fi unită prin o linie frîntă, conţinută în domeniu.*

Fie G un domeniu şi $x \in G$, altfel arbitrar. Să notăm cu G_x mulţimea punctelor $y \in G$ care pot fi unite cu x prin o linie frîntă situată în G.

Mulţimea G_x este deschisă, căci dacă $y \in G_x \subseteq G$, există o bulă S, cu centrul în y, conţinută în întregime în G. *Orice* punct z al acestei bule poate fi unit cu centrul y al bulei printr-un segment conţinut în întregime în S, deci în G. Deci $z \in G_x$, de unde $S \subseteq G_x$. Dacă $G_x \subset G$, atunci există un punct $u \in G - G_x$ şi o bulă S_u cu centrul în u, conţinută în G şi *disjunctă* de G_x (altfel, u ar putea fi unit printr-un segment de dreaptă cu unul din punctele mulţimii $S_u \cap G_x$ şi am avea $u \in G_x$).

Deci mulţimea $G - G_x$ este deschisă şi nevidă şi am avea

$$G = G_x \cup (G - G_x),$$

ceea ce ar contrazice ipoteza că G este conexă.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. CONTINUITATE

2.4.1. O aplicație $x \to f(x)$ a spațiului $(X, \mathcal{T})$ în spațiul $(Y, \mathcal{U})$ este continuă în *punctul* $x_0 \in X$ dacă pentru orice vecinătate U a punctului $f(x_0)$ există o vecinătate V a punctului x_0, astfel încît

$$f(V) \subseteq U.$$

Definiție echivalentă. f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$, $f^{-1}(U)$ este o vecinătate a lui x_0.
În adevăr, dacă f este continuă în x_0, din

$$f(V) \subseteq U$$

deducem

$$f^{-1}(U) \supseteq V,$$

deci $f^{-1}(U)$ este o vecinătate a lui x_0.

Reciproc, dacă $f^{-1}(U)$ este o vecinătate V a lui x_0, atunci $f(V) \subseteq U$, deci f este continuă în punctul x_0.

2.4.2. Aplicația $f: X \to Y$ este continuă în spațiul X dacă este continuă în fiecare punct din X.

Teorema I. *Aplicația $f: X \to Y$ este continuă în spațiul X dacă și numai dacă imaginea reciprocă prin f a oricărei mulțimi deschise din Y este o mulțime deschisă din X.*

Fie f continuă în X și G' o mulțime deschisă din Y. Cum G' este o vecinătate pentru fiecare din punctele sale, $f^{-1}(G') = G$ va fi (potrivit definiției a doua din paragraful precedent) o vecinătate pentru fiecare din punctele sale, deci o mulțime deschisă.

Reciproc să presupunem că $f^{-1}(G') = G$ este o mulțime deschisă în X, dacă G' este o mulțime deschisă a spațiului Y. Atunci, pentru orice punct $x_0 \in X$, și pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$, mulțimea $G_0 = f^{-1}(\text{Int } U)$ este o mulțime deschisă care conține punctul x_0. Deci $f^{-1}(U) \supseteq f^{-1}(\text{Int } U)$ este o vecinătate a punctului x_0 și f este continuă în punctul x_0.

Observații: 1° Cititorul va putea verifica singur că se obține un enunț valabil dacă în teorema precedentă se înlocuiesc mulțimile deschise cu mulțimile închise.

2° Imaginea *directă* a unei mulțimi deschise printr-o funcție continuă nu este totdeauna o mulțime deschisă.

În adevăr, luînd $X = (-1, +1)$ și $Y = \mathbf{R}$, imaginea *directă* a lui X prin funcția continuă $x \to |x|$ este mulțimea $[0, 1)$ care *nu* este deschisă.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema II. *Dacă* $f:X \to Y$ *este continuă în punctul* x_0 *şi dacă* $g:Y \to Z$ *este continuă în punctul* $y_0 = f(x_0)$, *atunci* $h = g \circ f:X \to Z$ *este continuă în punctul* x_0.

În adevăr, fie W o vecinătate a punctului $z_0 = g(y_0) = g(f(y_0)) = h(x_0)$. Mulţimea $g^{-1}(W) = U$ este o vecinătate a punctului y_0, iar mulţimea $V = f^{-1}(U)$ este o vecinătate a punctului x_0.

Dar

$$V = f^{-1}(U) = (f^{-1} \circ g^{-1})(W) = (g \circ f)(W) = h^{-1}(W),$$

deci h este continuă în punctul x_0.

2.4.3. Două spaţii X, Y sînt *homeomorfe* dacă există o bijecţie între cele două spaţii, care duce mulţimile deschise ale unui spaţiu în mulţimi deschise ale celuilalt spaţiu.

Aplicaţia f se numeşte (ca şi f^{-1}) în acest caz un *homeomorfism*.

Evident, f este un homeomorfism dacă şi numai dacă f şi f^{-1} sînt continue.

Să observăm că dacă f este o bijecţie şi este continuă, f^{-1} nu este neapărat continuă.

Exemplu. Fie $X = \mathbf{R}$ cu topologia discretă, $Y = \mathbf{R}$ cu topologia clasică. Aplicaţia $f:x \to x$ de la primul spaţiu la al doilea este continuă, dar $f^{-1}:Y \to X$ nu este continuă (se va aplica teorema I).

2.4.4. Fie X un spaţiu topologic şi A un subspaţiu al acestuia. Fie, pe de altă parte, $f:X \to Y$, unde Y este un spaţiu topologic. Funcţia $g:A \to Y$, egală cu f în orice punct din A, se numeşte *restricţia* lui f la A şi se notează.

$$f \mid A, \text{ sau } f_A.$$

Teoremă. *Dacă* $f:X \to Y$ *este continuă şi* A *un subspaţiu al lui* X, $f \mid A$ *este continuă.*

Vom pune $g = f \mid A$. Dacă G^* este o mulţime deschisă a spaţiului Y, atunci

$$g^{-1}(G^*) = A \cap f^{-1}(G^*),$$

deci $g^{-1}(G^*)$ aparţine topologiei spaţiului A: g este continuă.

Aplicaţie: Dacă $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *este continuă în fiecare punct* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *atunci funcţiile*

$$f_i = f(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_{i-1}^\circ, x_i, x_{i+1}^\circ, \ldots, x_n^\circ), \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

sînt continue.

Exerciţii: 1° Să se arate că dacă $f: X \to Y$ este continuă într-un punct $x \in A$, atunci $f \mid A$ este continuă în acest punct.

Scanned with OKEN Scanner

R: Fie U o vecinătate a lui $f(x_0)$.

Avem, punînd $g = f \mid A$,

$$g^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U) \supseteq A \cap f^{-1}(\text{Int } U).$$

Cum membrul al doilea este o mulțime deschisă, conținînd punctul x_0 al subspațiului A, rezultă că primul membru este o vecinătate a lui x_0.

2^0 Aplicația $x \to x$ a spațiului $(X, \mathcal{T})$ în spațiul $(X, \mathcal{T}')$ este continuă dacă și numai dacă $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

2.4.5. *O aplicație $f: X \to Y$ continuă duce orice mulțime conexă a spațiului X într-o mulțime conexă a spațiului Y.*

Raționînd asupra restricției lui f la mulțimea considerată, putem presupune de la început spațiul X conex. De asemenea, putem să presupunem, fără micșorarea generalității, că $f(X) = Y$[1]. Vom arăta, în asemenea condiții, că spațiul Y este conex. Să presupunem că

$$Y = G_1^* \cup G_2^*,$$

unde G_1^*, G_2^* sînt mulțimi deschise, disjuncte.
Va fi suficient să arătăm că una din aceste mulțimi este vidă.
Avem

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(G_1^*) \cup f^{-1}(G_2^*) = G_1 \cup G_2,$$

unde G_1, G_2 sînt mulțimi deschise ale spațiului X. Aceste mulțimi sînt evident disjuncte, deoarece G_1^*, G_2^* sînt disjuncte. Dar X este conex. Deci G_1 sau G_2 este vidă. Fie, de exemplu, $G_2 = \emptyset$. Atunci, $G_2^* = \emptyset$.

Exercițiu: Să se arate că singurele aplicații continue ale unui spațiu conex într-un spațiu discret sînt aplicațiile constante.

Reciproc: Spațiul $(X, \mathcal{T})$ este conex dacă orice aplicație continuă a acestuia într-un spațiu discret este o aplicație constantă.

§ 5. FUNCȚII CONTINUE REALE. FUNCȚII CONTINUE DEFINITE PE DREAPTA NUMERICĂ

2.5.1. În cazul în care $X = \mathbf{R}$ sau $Y = \mathbf{R}$, cu topologia obișnuită a dreptei, studiul funcțiilor continue $f: X \to Y$ poate fi considerabil adîncit. Nu vom urmări aici acest studiu pînă la ultimele sale consecințe, ci ne vom mărgini să semnalăm, în cadrul general în care ne plasăm aici, unele proprietăți care, într-o formulare particulară, sînt deja cunoscute cititorului din cursul de analiză clasică.

---

[1] În adevăr, dacă $f(X) = Y' \subset Y$, putem înlocui spațiul Y prin spațiul Y' cu topologia indusă de topologia asupra lui Y.

Fie, în primul rînd, $f:X \to \mathbf{R}$, unde $\mathbf{R}$ este dreapta numerică cu topologia obișnuită. Vom spune că f posedă (sau are) *proprietatea lui Darboux* în spațiul X dacă $a \in f(X)$, $b \in f(X)$ implică $[a, b] \subseteq f(X)$. Cu această definiție, putem enunța

Teorema I. *Dacă $f:X \to \mathbf{R}$ este continuă și X este conex, atunci f posedă proprietatea lui Darboux.*

În adevăr, fie $a \in f(X)$, $b \in f(X)$, $a < b$ și $c \in (a, b)$. Să punem

$$A = \{x : f(x) < c\}, \qquad B = \{x : f(x) \geqq c\}.$$

Evident, $X = A \cup B$. Pe de altă parte, $f(A) \ni a, f(B) \ni b$, deci mulțimile A, B nu sînt vide. Ele sînt disjuncte. În sfîrșit, A este deschisă.

Dacă nu ar exista nici un punct pentru care $f(x) = c$, atunci B ar fi și ea deschisă și X nu ar fi conex. Cum c este arbitrar în (a, b), teorema rezultă.

Teorema II. *O funcție continuă reală duce orice mulțime conexă a spațiului X într-un interval.*

Fie $f:X \to \mathbf{R}$, unde X este un spațiu conex[1], iar f continuă. Să presupunem, în primul rînd, funcția f mărginită și să notăm cu m, M marginile acestei funcții. Fie ε un număr pozitiv supus la singura condiție

$$\varepsilon < \frac{1}{2}(M - m).$$

Funcția f ia sigur o valoare $m' \in (m, m + \varepsilon)$ și o valoare $M' \in (M - \varepsilon, M)$. Cum $m' < M'$, rezultă că f ia *orice* valoare din $(m+\varepsilon, M-\varepsilon)$.

Cum ε este arbitrar, f ia orice valoare din (m, M).

Deci

$$f(X) \supseteq (m, M).$$

Evident, nu putem avea decît unul din următoarele patru cazuri:

$$f(X) = (m,M), \quad f(X) = [m,M), \quad f(X) = (m,M], \quad f(X) = [m,M].$$

Raționamentul devine încă mai simplu dacă presupunem că funcția f nu este mărginită în spațiul X.

Lăsăm cititorului ca exercițiu dezvoltarea raționamentului în acest caz.

Consecință: *Singurele mulțimi conexe ale dreptei numerice sînt intervalele* (deschise, deschise la dreapta sau la stînga, închise).

Fie, în adevăr, K o mulțime conexă a dreptei și f un homeomorfism al dreptei în ea însăși (de exemplu, $f:x \to x$). Mulțimea $J = f(K)$ este conexă, deci $K = f^{-1}(J)$ este un interval.

---

[1] Așa cum am mai procedat într-un paragraf precedent, ne putem reduce la acest caz, operînd asupra restricției lui f la o parte conexă a lui X, fără a micșora prin aceasta generalitatea rezultatului.

Scanned with OKEN Scanner

2.5.2. Pe dreapta numerică $\mathbf{R}$ se pot introduce, în afară de topologia obişnuită, două topologii foarte utile în studiul funcţiilor reale.

Să considerăm pe dreapta $\mathbf{R}$ familia $\mathcal{U}_d$ a mulţimilor formate din dreapta $\mathbf{R}$ însăşi, mulţimea vidă şi mulţimile de forma următoare:

$$\{x : x < \alpha\}, \qquad \alpha \in \mathbf{R},$$

adică semidreptele deschise mărginite la dreapta.

Dacă $G_1 \in \mathcal{U}_d$ şi $G_2 \in \mathcal{U}_d$, este vizibil că $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}_d$. Fie $\{G_i\}_{i \in I}$ o familie de semidrepte deschise, mărginite la dreapta, cu

$$G_i = \{x : x < \alpha_i\}.$$

Dacă $\sup \alpha_i = +\infty$, atunci $\bigcup_{i \in I} G_i = \mathbf{R} \in \mathcal{U}_d$.

Dacă $\sup \alpha_i = \alpha < \infty$, atunci $\bigcup_{i \in I} G_i = G$, unde

$$G = \{x : x < \alpha\} \in \mathcal{U}_d.$$

Deci $\mathcal{U}_d$ formează o topologie pentru $\mathbf{R}$. O vom numi *topologia superioară* a dreptei.

În mod simetric se defineşte *topologia inferioară* $\mathcal{U}_s$ a dreptei, ca familie a semidreptelor deschise mărginite la stînga, căreia i se adaugă spaţiul întreg (dreapta $\mathbf{R}$) şi mulţimea vidă.

În topologia superioară a dreptei, o vecinătate a unui punct $x \in \mathbf{R}$ este o mulţime care conţine o semidreaptă $(-\infty, \alpha)$ cu $\alpha > x$.

O funcţie $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbf{R}$ este, prin definiţie, *superior* (respectiv: inferior) *semicontinuă* în punctul $x_0 \in X$, dacă ea este continuă în acest punct ca aplicaţie a spaţiului $(X, \mathcal{T})$ în spaţiul $(R, \mathcal{U}_d)$ (respectiv: în spaţiul $(R, \mathcal{U}_s)$).

Noţiunea de funcţie semicontinuă a fost introdusă în ştiinţă de René Baire.

Definiţia dată este echivalentă cu următoarea:

Funcţia $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbf{R}$ este superior semicontinuă în puntul $x_0 \in X$ dacă fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde o vecinătate V_ε a punctului x_0, astfel încît să avem implicaţia

$$x \in V_\varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Pentru funcţiile inferior semicontinue avem o definiţie simetrică, pe care nu o mai reproducem aici.

Exerciţii: 1° Dacă f, g sînt superior semicontinue în punctul $x_0 \in X$, funcţia $f + g$ este superior semicontinuă în punctul x_0.

2° Dacă f este superior semicontinuă în punctul $x_0 \in X$, funcţia $g = -f$ este inferior semicontinuă în acest punct.

Scanned with OKEN Scanner

3° Dacă f este superior semicontinuă în punctul $x_0 \in X$ și $\alpha > 0$, funcția αf este superior semicontinuă în acest punct.

4° Dacă $f: X \to R$ este o funcție oarecare, funcția $M_f: X \to \mathbf{R}$ definită în fiecare punct $x_0 \in X$ prin relația

$$M_f(x_0) = \inf_{V_{x_0} \in \mathcal{V}_{x_0}} \sup_{x \in V_{x_0}} \{f(x)\},$$

unde $\mathcal{V}_x$ este familia vecinătăților lui x_0, este superior semicontinuă în acest punct (deci pe toată dreapta).

5° În condițiile exercițiului precedent, funcția $m_f: X \to \mathbf{R}$, definită în fiecare punct $x_0 \in X$ prin relația

$$m_f(x_0) = \sup_{V_{x_0} \in \mathcal{V}_{x_0}} \inf_{x \in V_{x_0}} \{f(x)\}$$

este inferior semicontinuă în acest punct (deci pe toată dreapta).

6° Dacă $f: X \to \mathbf{R}$, $g: X \to \mathbf{R}$ sînt superior semicontinue în punctul $x_0 \in X$, atunci funcția $h = \inf(f,g)$ este superior semicontinuă în acest punct.

7° Dacă $\{f_i\}_{i \in I}$ este o familie de funcții superior semicontinue în punctul x_0, funcția f definită în fiecare punct de relația

$$f = \inf \{f_i\}_{i \in I}$$

este superior semicontinuă în acest punct.

R: Fie $i_0 \in I$. Numărului pozitiv ε îi corespunde o vecinătate V_0 a punctului x_0, astfel încît

$$x \in V_0 \Rightarrow f_{i_0}(x) < f_{i_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cu atît mai mult

$$f(x) < f_{i_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde

$$f(x) \leqq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon.$$

În particular (R. Baire): *limita unui șir descrescător de funcții superior semicontinue (în particular: continue) este o funcție superior semicontinuă.*

2.5.3. Vom spune că o funcție $f: X \to \mathbf{R}$ este superior (inferior) semicontinuă în întreg spațiul X dacă f este superior (inferior) semicontinuă în fiecare punct $x_0 \in X$. Clasei funcțiilor superior semicontinue (ca și clasei funcțiilor inferior semicontinue) li se aplică cele două proprietăți generale (teorema I și observația 1°) din **2.4.2.**.

Scanned with OKEN Scanner

Le vom enunța separat din nou aici, din cauza utilității lor:

I. *Aplicația* $f: X \to R$ *este superior semicontinuă dacă și numai dacă mulțimea*

$$f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \{x : f(x) < \alpha\}$$

este deschisă pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$.

II. *Aplicația* $f: X \to \mathbf{R}$ *este superior semicontinuă dacă și numai dacă mulțimea*

$$f^{-1}([\alpha, +\infty)) = \{x : f(x) \geqslant \alpha\}$$

este închisă pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$.

Pentru funcțiile inferior semicontinue vom avea două proprietăți analoge, pe care nu le mai transcriem.

Exerciții: 1° *Funcția* $f: X \to \mathbf{R}$ *este continuă dacă și numai dacă mulțimile*

$$\{x : f(x) < \alpha\}, \quad \{x : f(x) > \alpha\}$$

sînt deschise, oricare ar fi α *real.*

2° Dacă $f: X \to \mathbf{R}$ este continuă, mulțimea

$$\{x : f(x) = \alpha\}$$

este închisă, oricare ar fi α real.

3° Funcția caracteristică a unei mulțimi G a spațiului topologic $(X, \mathcal{T})$ este inferior semicontinuă dacă și numai dacă G este o mulțime deschisă.

R: Mulțimea $\{x : \chi_G(x) > \alpha)$ este mulțimea vidă, mulțimea G sau spațiul X, după cum $\alpha \geqslant 1$, $\alpha \in [0,1)$ sau $\alpha < 0$.

4° Într-un spațiu topologic discret, funcția caracteristică a oricărei mulțimi este continuă.

§ 6. COMPACITATE

2.6.1. Noțiunea modernă de spațiu compact își are originea în cunoscuta lemă a lui Lebesgue[1]:

Din orice acoperire deschisă a unei mulțimi închise și mărginite a spațiului euclidian cu q dimensiuni se poate extrage o subacoperire finită.

S-a observat ulterior că această proprietate *caracterizează* mulțimile închise și mărginite[2].

[1] Numită de unii autori lema lui Heine-Borel.
[2] A se vedea lema din 2.7.1.

Scanned with OKEN Scanner

Acest lucru a condus pe matematicienii sovietici P. S. Alexandrov și P. Urîson să ia proprietatea exprimată de lema lui Lebesgue drept definiție a unei clase de mulțimi pe care ei le-au numit *bicompacte*, dar care *astăzi*, din cauza importanței lor, sînt numite de majoritatea autorilor spații *compacte*.

După autorii sovietici citați:

K_1. *Spațiul* $(X, \mathcal{T})$ *este compact dacă orice acoperire deschisă a lui* X *conține o subacoperire finită.*

Definiții echivalente:

K_2. *Spațiul* $(X, \mathcal{T})$ *este compact dacă orice familie de mulțimi închise cu intersecția vidă conține o subfamilie finită cu aceeași proprietate.*

K_3. *Spațiul* $(X, \mathcal{T})$ *este compact dacă orice familie de mulțimi închise cu proprietatea intersecției finite are o intersecție nevidă.*

(O familie de mulțimi posedă *proprietatea intersecției finite* dacă orice subfamilie *finită* a acesteia are intersecția nevidă.)

Să stabilim echivalența acestor trei definiții.

1) $K_1 \Leftrightarrow K_2$: Fie $\mathcal{G}$ o familie de părți *deschise* ale lui X. Avem (de Morgan)

$$X - \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}\} = \bigcap \{X - G : G \in \mathcal{G}\}. \tag{1}$$

Dacă $\mathcal{F}$ este o familie de mulțimi închise ale lui X, cu intersecția vidă, care conține o subfamilie *finită* $\mathcal{F}_1$ cu aceeași proprietate, atunci punînd

$$\mathcal{G} = \{G : X - G \in \mathcal{F}\},$$
$$\mathcal{G}_1 = \{G_1 : X - G_1 \in \mathcal{F}_1\}$$

deducem, din formula de mai sus, $K_2 \Rightarrow K_1$.

Reciproc, oricărei familii $\mathcal{G}$ de mulțimi deschise îi putem face să corespundă familia de mulțimi închise

$$\mathcal{F} = \{F : X - F \in \mathcal{G}\}.$$

Dacă $\mathcal{G}$ acoperă spațiul X, formula (1) ne arată că intersecția mulțimilor familiei $\mathcal{F}$ este vidă. Dacă $\mathcal{G}$ conține o subacoperire *finită* $\mathcal{G}_1$ a lui X, tot formula (1) (în care înlocuim pe $\mathcal{G}$ prin $\mathcal{G}_1$) ne arată că familia *finită* de mulțimi închise

$$\mathcal{F}_1 = \{F : X - F \in \mathcal{G}_1\},$$

care este subfamilie a lui $\mathcal{F}$, are intersecția vidă. Așadar $K_1 \Rightarrow K_2$.

2) $K_2 \Leftrightarrow K_3$. Să considerăm o familie $\mathcal{F}$ de mulțimi închise cu proprietatea intersecției finite. Să presupunem proprietatea K_2 îndeplinită. Dacă intersecția mulțimilor familiei $\mathcal{F}$ ar fi vidă, atunci ar exista o subfamilie *finită* $\mathcal{F}_1$ a lui $\mathcal{F}$ cu intersecția vidă, ceea ce contrazice proprietatea K_3. Așadar $K_2 \Rightarrow K_3$.

Să presupunem acum condiția K_3 îndeplinită și să considerăm o familie $\mathcal{F}$ de mulțimi închise cu intersecția vidă. Dacă *nici o subfamilie* finită $\mathcal{F}_1$

a lui $\mathcal{F}$ nu are proprietatea lui $\mathcal{F}$ (adică : intersecţia vidă), atunci $\mathcal{F}$ se bucură de proprietatea intersecţiei finite, deci are intersecţia nevidă, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Aşadar $K_3 \Rightarrow K_2$ şi echivalenţa celor trei definiţii este demonstrată.

2.6.2. O consecinţă imediată a echivalenţei celor trei definiţii este constituită de

Teorema I. *Într-un spaţiu $(X, \mathcal{T})$ compact, orice familie de mulţimi închise nevide total ordonată de relaţia de incluziune, are o intersecţie nevidă.*

Într-adevăr, o astfel de familie are proprietatea intersecţiei finite.

În particular, *într-un spaţiu $(X, \mathcal{T})$ compact, un şir descendent de mulţimi închise (nevide) are intersecţia nevidă.*

Iată o aplicaţie simplă a acestei teoreme : Dreapta numerică *nu* este compactă, deoarece şirul de mulţimi închise

$$\{[n, \infty)\}_{n \in N}$$

este descendent şi are o intersecţie vidă.

O parte Y a unui spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este *compactă*, dacă spaţiul $(Y, \mathcal{U})$, unde $\mathcal{U}$ este topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe Y, este compact.

Teorema următoare este foarte utilă în aplicaţii :

Teorema II. *Orice parte închisă Y a unui spaţiu compact $(X, \mathcal{T})$ este compactă.*

Fie în adevăr, $\mathcal{G}$ o acoperire deschisă a lui Y. Familia

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \cup \{X\text{-}Y\}$$

constituie o acoperire deschisă a lui X.

$\mathcal{G}_1$ conţine, prin definiţie, o subacoperire $\mathcal{G}^*$ *finită*. Familia

$$\mathcal{G}_1^* = \mathcal{G}^* - \{X\text{-}Y\}$$

este o subfamilie finită a lui $\mathcal{G}$, care acoperă mulţimea Y. Deci Y este compact.

2.6.3. O parte A a spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$ este, prin definiţie, *relativ compactă* dacă aderenţa sa $\overline{A}$ este o mulţime compactă.

Din teorema II a numărului precedent rezultă că *orice parte a unui spaţiu compact este relativ compactă.*

Un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este, prin definiţie, *local compact* dacă fiecare punct $x \in X$ are o vecinătate compactă.

Orice spaţiu compact este, evident, local compact, dar există spaţii local compacte care nu sînt compacte.

Exemplu. Dreapta numerică, cu topologia obişnuită, este un spaţiu local compact, dar nu compact.

Scanned with OKEN Scanner

La fel: planul, spaţiul cu q dimensiuni $(q > 2)$.

Un spaţiu topologic *este numerabil compact*, dacă pentru orice şir $\{x_n\}$ avem $\bigcap_{n\in N} \overline{A_n} \neq \emptyset$, unde $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.

Teoremă: *Orice spaţiu $(X, \mathcal{T})$ compact este numerabil compact.*

Fie, în adevăr, $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir de puncte ale acestui spaţiu şi $\{A_n\}_{n\in N}$ şirul de mulţimi definite astfel:

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Acest şir este descendent. Deducem că şirul de mulţimi închise $\{\overline{A}_n\}_{n\in N}$ este şi el descendent, deci acest şir are o intersecţie nevidă (2.6.2., teorema I). Adică există cel puţin un punct

$$x_0 \in \overline{A}_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

În particular, punctul x_0 aparţine închiderii şirului dat

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Exerciţii: 1° Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu compact şi $\mathcal{T}'$ o topologie peste X astfel încît $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, spaţiul $(X, \mathcal{T}')$ este compact.

2° O parte închisă a unui spaţiu local compact este local compactă.

R: Fie F o parte închisă a spaţiului $(X, \mathcal{T})$ local compact. Dacă $x \in F$, atunci $x \in X$, deci x are o vecinătate compactă K. Fie $\mathcal{U}$ topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe K. Intersecţia $F \cap K = K_0$ este o parte închisă a spaţiului topologic compact $(K, \mathcal{U})$, deci este compactă în raport cu K. Rezultă că K_0 este compactă în raport cu X. Cum $K_0 \subset F$, exerciţiul este demonstrat.

3° O parte închisă a unui spaţiu numerabil compact este numerabil compactă.

§ 7. PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR CONTINUE, DEFINITE PE UN COMPACT

2.7.1. Teorema I. *Dacă $f: X \to Y$ este continuă pe spaţiul compact $(X, \mathcal{T})$, atunci $f(X)$ este un compact.*

Putem, lucrînd cu topologia indusă, să presupunem $f(X) = Y$, fără a micşora prin aceasta generalitatea raţionamentului. Fie $\{G_i\}_{i\in I}$ o acoperire deschisă a lui Y. Mulţimile familiei

$$\{f^{-1}(G_i)\}_{i\in I}$$

sînt deschise, ele acoperă spaţiul X. Există deci o subacoperire *finită* $\{f^{-1}(G_{i_k})\}_{k\leq n}$ a acestui spaţiu. Deducem

$$f\left(\bigcup_{k\leq n} f^{-1}(G_{i_k})\right) = \bigcup_{k\leq n} G_{i_k} \supseteq f(X) = Y,$$

deci Y este compact.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema II. *Orice funcție reală* $f: X \to \mathbf{R}$, *superior semicontinuă pe compactul* $(X, \mathcal{T})$, *este superior mărginită pe acest compact și își atinge marginea superioară.*

În adevăr, f este *continuă* ca aplicație a spațiului $(X, \mathcal{T})$ în spațiul $\mathbf{R}$, $\mathcal{U}_d$) (2.5.2.).

Deci, pentru orice $\alpha \in f(X)$, mulțimea

$$F_\alpha = f^{-1}([\alpha, +\infty))$$

este închisă. Familia de mulțimi

$$\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in f(X)}$$

este total ordonată de relația de incluziune.
În adevăr, dacă $\alpha \neq \beta$ și $\alpha < \beta$, atunci

$$[\alpha, \infty) \supset [\beta, \infty)$$

și reciproc. Prin urmare (2.6.2., teorema I), familia precedentă are o intersecție nevidă. Fie, atunci, $x_0 \in X$, astfel încît

$$x_0 \in f^{-1}([\alpha, \infty))$$

oricare ar fi $\alpha \in f(X)$. Deducem

$$f(x_0) \in [\alpha, +\infty),$$

adică

$$\alpha \leqq f(x_0)$$

pentru orice $\alpha \in f(X)$ și teorema este demonstrată.

Ca o consecință imediată a acestei teoreme obținem propoziția:

O funcție reală f *continuă pe spațiul compact* $(X, \mathcal{T})$ *este mărginită pe acest spațiu și își atinge cele două margini.*

Din cauza importanței acestei ultime propoziții în analiza clasică, vom prezenta aici o a doua demonstrație, independentă de teorema precedentă. În acest scop vom stabili în prealabil următoarea

Lemă: *Orice compact al dreptei numerice este o mulțime închisă și mărginită.*

Fie, în adevăr, $K \subset R$ compactul considerat.

Fie, de asemenea, $\mathcal{G}$ o acoperire deschisă a lui K.
Fiecărui punct $x \in K$ îi corespunde o mulțime deschisă $G_x \ni x$, deci un interval *finit* I_x, astfel încît

$$x \in I_x \subseteq G_x \in \mathcal{G}.$$

Prin ipoteză, există un număr *finit* de mulțimi $\{G_n\}$, deci de intervale I_x care acoperă mulțimea K. Așadar, K este mărginită.

Fie, acum, $y \in \overline{K}$. Dacă $y \notin K$, putem atașa fiecărui punct x un interval I_x care să *nu* conțină punctul y. Să facem să corespundă fiecărui interval I_x un interval $I_{xy} \ni y$, *disjunct* de I_x. Familia $\{I_x\}_{x \in K}$ acoperă mulțimea K, deci există o subfamilie finită

$$I_{x_1}, I_{x_2}, \ldots, I_{x_n}$$

care acoperă mulțimea K. Să punem

$$J = \bigcap_{k \leqq n} I_{x_k y}.$$

J este un interval care conține punctul y, dar este disjunct de mulțimea $\bigcup_{k \leqq n} I_{x_k}$, deci cu atît mai mult de mulțimea K, ceea ce contrazice ipoteza $y \in \overline{K}$. Deci $\overline{K} = K$ și compactul K este o mulțime închisă.

Propoziția enunțată rezultă imediat din această lemă.

În adevăr, $f(X)$ este un compact numeric, adică o mulțime mărginită și închisă.

Marginile acestei mulțimi aparțin mulțimii.

Exerciții: 1° Să se arate că intersecția mulțimilor familiei $\mathcal{F}$ care intervine în demonstrarea teoremei II este formată din un singur punct.

2° O funcție $f: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{U})$ continuă duce o mulțime compactă prin șiruri într-o mulțime compactă prin șiruri.

R: Să presupunem, pentru simplitate, că X este compact prin șiruri și că $f(X) = Y$. Fie $\{y_n\}_{n \in N}$ un șir de puncte din Y și $x_n \in f^{-1}(y_n)$, altfel arbitrar. Prin ipoteză, mulțimea $\{x_n\}_{n \in N}$ are un punct de acumulare x_0.

Fie U_0 o vecinătate a punctului $f(x_0) \in Y$.

Mulțimea $V_0 = f^{-1}(U_0)$ este o vecinătate a punctului x_0, deci există cel puțin un punct x_n astfel încît

$$x_n \in V_0 - \{x_0\}.$$

Deducem

$$y_n = f(x_n) \in U_0 - \{f(x_0)\},$$

deci $f(x_0)$ este un punct de acumulare pentru șirul $\{y_n\}_{n \in N}$.

3° Dacă o funcție reală f continuă pe compactul X este strict pozitivă pe X, există un număr pozitiv p, astfel încît $f(x) \geqq p$, oricare ar fi $x \in X$.

4° Un homeomorfism $f: (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{U})$ duce un spațiu local compact într-un spațiu local compact.

Scanned with OKEN Scanner

§ 8. SPAȚII HAUSDORFF

2.8.1. Să considerăm un șir $\{x_n\}_{n\in N}$ de puncte din spațiul topologic $(X, \mathcal{T})$. Vom spune că acest șir tinde (sau converge) către punctul $a \in X$ dacă orice vecinătate V a lui a conține toate punctele șirului, afară de un număr finit.

Este clar că dacă șirul $\{x_n\}$ converge către a, orice subșir al său $\{x_{k_n}\}$ converge către același punct.

Dar limita unui șir nu este în general unică.
Să considerăm exemplul următor: X este o mulțime infinită, $\mathcal{T}$ este formată din mulțimea X, mulțimea vidă și complementarele de mulțimi finite.

Într-un astfel de spațiu topologic, orice șir $\{x_n\}$ având termenii diferiți doi cîte doi, este convergent, și anume către orice punct a al spațiului. În adevăr, orice vecinătate V a lui a lasă în afară un număr finit de puncte din X și cu atît mai mult un număr finit de termeni ai șirului considerat.

Așadar, o teorie a convergenței într-un astfel de spațiu este imposibilă. De aici necesitatea de a restrînge generalitatea spațiilor topologice considerate, prin introducerea unei noi axiome:

Axioma lui Hausdorff. *Pentru orice pereche de puncte (x, y) există două vecinătăți V_x, V_y ale acestor puncte, disjuncte între ele.*

Un spațiu topologic în care este verificată această axiomă se numește un spațiu al lui Hausdorff sau un spațiu T_2, sau, în sfîrșit, cu o denumire mai nouă, un spațiu *separat*.

2.8.2. Justificarea axiomei introduse este dată de următoarea proprietate:

Teorema I. *Într-un spațiu al lui Hausdorff, un șir $\{x_n\}$ convergent are o singură limită.*

Să presupunem că șirul considerat tinde către a și către b, cu $a \neq b$. Prin ipoteză, există o vecinătate V_a a lui a și o vecinătate V_b a lui b, astfel încît $V_a \cap V_b = \emptyset$.

Pe de altă parte, din definiția limitei există un număr natural n_a astfel încît $n > n_a$ implică $x_n \in V_a$ și un număr natural n_b astfel încît $n > n_b$ implică $x_n \in V_b$.

Atunci, pentru $n > \max\{n_a, n_b\}$ vom avea simultan $x_n \in V_a$ și $x_n \in V_b$, ceea ce este absurd.

Teorema II. *Orice parte compactă a unui spațiu al lui Hausdorff este închisă.*

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu separat și K o parte compactă a sa. Vom arăta că $\complement K$ este deschisă.

Fie $x \in \mathbf{C}K$, altfel arbitrar. Dacă $y \in K$, există două vecinătăți deschise G_x, G_y, respectiv ale punctelor x, y, astfel încît $G_x \cap G_y = \emptyset$.

Familia

$$\{G_y : y \in K\}$$

este o acoperire deschisă a lui K. Există deci o subfamilie finită.

$$\{G_{y_p} : y_p \in K, \quad p \leqq n\}$$

care acoperă mulțimea K. Vom face să corespundă mulțimii G_{y_p} mulțimea $G_x^p \ni x$.

Mulțimea

$$G = \bigcap_{p \leqq n} G_x^p$$

este deschisă și avem

$$x \in G \subseteq \bigcap_{p \leqq n} \mathbf{C}G_{y_p} = \mathbf{C} \bigcup_{p \leqq n} G_{y_p} \subseteq \mathbf{C}K.$$

Așadar, $\mathbf{C}K$ este vecinătate a oricărui punct x al său, deci K este deschisă.

2° Dacă numim vecinătate a unei mulțimi A orice mulțime B cu proprietatea Int $B \supseteq A$, să se arate că un spațiu al lui Hausdorff se bucură de proprietatea următoare: Pentru orice compact $K \subset X$ și pentru orice $x \notin K$ există o vecinătate V_x a lui x și o vecinătate V_K a lui K, astfel încît $V_x \cap V_K = \emptyset$.

R: Pentru orice $y \in K$ există o vecinătate U_y a sa, astfel încît $x \notin \overline{U_y}$. Familia $\{\text{Int } U_y\}_{y \in K}$ acoperă compactul K, deci există o subfamilie finită

$$U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

a căror reuniune acoperă mulțimea K și astfel încît $x \notin \overline{U}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de unde $x \notin \overline{\bigcup U_i} = V$.

V este, vizibil, o vecinătate pentru K și $X - V$ o vecinătate pentru x.

2.8.3. O condiție mai slabă decît condiția de separare a lui F. Hausdorff a fost dată anterior de M. Fréchet. Clasa de spații introduse de Fréchet se numește clasa spațiilor T_1.

Un spațiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este, prin definiție, un spațiu T_1 dacă pentru orice pereche de puncte distincte x, y ale acestuia există o vecinătate V_x a lui x care nu conține punctul y și o vecinătate V_y a lui y care nu conține punctul x.

Evident, orice spațiu T_2 este un spațiu T_1.

Dar nu orice spațiu T_1 este un spațiu T_2 (v. exercițiul 1° de mai jos).

Teoremă: *Un spațiu topologic este un spațiu T_1 dacă și numai dacă orice mulțime formată din un singur punct este închisă.*

În adevăr, dacă punctele (presupuse distincte) dar altfel arbitrare x și y ale spațiului topologic $(X, \mathcal{T})$ sînt astfel încît $\{x\}$, $\{y\}$ sînt mulțimi închise, atunci $\mathbf{C}\{x\}$ este o mulțime deschisă conținînd punctul y, deci o vecinătate a lui y care nu conține punctul x, în timp ce $\mathbf{C}\{y\}$ este o vecinătate a lui x care nu conține punctul y.

Reciproc, să presupunem că $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu T_1 și să considerăm un punct $x \in X$.

Dacă $y \neq x$, există o vecinătate deschisă G_y a lui y, care nu conține punctul x. Putem scrie, pe de altă parte,

$$G_y \subseteq \mathbf{C}\{x\} = \bigcup \{y : y \neq x\} \subseteq \bigcup \{G_y : y \neq x\} \subseteq \mathbf{C}\{x\},$$

de unde

$$\mathbf{C}\{x\} = \{G_y : y \neq x\}$$

și $\mathbf{C}\{x\}$ este o mulțime deschisă, de unde rezultă că $\{x\}$ este o mulțime închisă.

Exerciții: 1° Fie $(X, \mathcal{T})$ spațiul topologic în care X este o mulțime nenumerabilă, iar $\mathcal{T}$ este familia părților lui X care sînt complementare de submulțimi numerabile ale lui X. Să se arate:

1° că $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu T_1;

2° că $(X, \mathcal{T})$ nu este un spațiu T_2.

R. Se va verifica, în primul rînd, că $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu topologic. Fie $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$ și fie $F = \{x_n\}_{n \in N}$ un șir de puncte din X, conținînd punctul x, dar nu punctul y. Mulțimea $\mathbf{C}F \in \mathcal{T}$ și conține punctul y, deci este o vecinătate a lui y, care nu conține punctul x.

Deci $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu T_1.

Să presupunem că $(X, \mathcal{T})$ ar fi un spațiu T_2.

Atunci ar exista o vecinătate deschisă G_x a lui x și o vecinătate deschisă G_y a lui y, astfel încît $G_x \cap G_y = \emptyset$.

$G_x \subset \mathbf{C}G_y$ ar fi o mulțime numerabilă și tot așa G_y ar fi o mulțime numerabilă. Ar rezulta că X este o mulțime numerabilă.

2° Într-un spațiu T_1 un punct x este punct de acumulare al mulțimii E dacă și numai dacă pentru orice mulțime deschisă $G \ni x$, mulțimea $G - \{x\}$ conține o infinitate de puncte din E.

R: Fie $G \ni x$, astfel încît $G - \{x\}$ conține un număr finit de puncte din E. Fie $G \cap (E - \{x\}) = \bigcup_{i \leqq n} \{x_i\}$.

Membrul al doilea este o mulţime închisă, deci $\mathbf{C}(\bigcup\{x_i\})\cap G$ este o vecinătate deschisă a lui x.

Dar această vecinătate nu ar conţine decît punctul x din E. În adevăr,

$$(\mathbf{C}(\bigcup\{x_i\})\cap G)\cap(E-\{x\}) = \mathbf{C}\Big(\bigcup_{i\leqq n}\{x_i\}\Big)\cap\bigcup_{i\leqq n}\{x_i\} = \emptyset,$$

deci x nu ar fi punct de acumulare pentru E.

Observaţie. Din ex. precedent rezultă că într-un spaţiu T_1 o mulţime *finită* nu are punct de acumulare.

3° Într-un spaţiu T_1, orice mulţime conexă care conţine mai mult decît un punct este infinită.

R: Fie $(X, \mathcal{T})$ spaţiul considerat, Y o parte conexă a sa, conţinînd mai mult decît un punct.

Fie $\mathcal{U}$ topologia indusă de $\mathcal{T}$ pe Y. $(Y, \mathcal{U})$ este un spaţiu T_1. Y este, în acest spaţiu o mulţime *deschisă*, deci are o infinitate de puncte (ex. 2°).

4° Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $(Y, \mathcal{U})$ un spaţiu topologic al lui Hausdorff. Fie $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ două aplicaţii continue. Să se arate că mulţimea

$$\{x : f(x) = g(x)\}$$

este închisă.

R: Fie x' un punct din X, pentru care $f(x') \neq g(x')$.

Există o vecinătate deschisă $U_f \ni f(x')$ şi o vecinătate deschisă $U_g \ni g(x')$, astfel încît $U_f \cap U_g = \emptyset$.

Mulţimile $V_f = f^{-1}(U_f)$, $V_g = g^{-1}(U_g)$ sînt deschise şi conţin punctul x'. Deci $V_f \cap V_g$ este o vecinătate a lui x', care nu conţine un punct x pentru care $f(x) = g(x)$.

§ 9. COMPACTIFICAREA CU UN PUNCT A UNUI SPAŢIU TOPOLOGIC. TEOREMA LUI P. S. ALEXANDROV

2.9.1. Proprietăţile spaţiilor compacte au pus suficient în evidenţă importanţa lor. De aceea, întrebarea următoare apare ca legitimă: Fiind dat un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$, se poate construi un spaţiu topologic *compact* $(X^*, \mathcal{T}^*)$ astfel încît $X \subset X^*$, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$?

S-au dat diverse răspunsuri — toate afirmative — la această întrebare. Cel mai simplu răspuns (inspirat de teoria funcţiilor analitice de o variabilă complexă) a fost dat de P. S. Alexandrov:

Teorema I. (P. S. Alexandrov). *Fie* $(X, \mathcal{T})$ *un spațiu topologic,* ∞ *un element care nu aparține acestui spațiu și* $X^* = X \cup \{\infty\}$. *Să notăm cu* $\mathcal{T}^*$ *familia de părți ale lui* X^*, *formată din toate mulțimile familiei* $\mathcal{T}$, *precum și din complementarele (în raport cu* X*) părților compacte și închise ale lui* $(X, \mathcal{T})$.

Spațiul $(X^*, \mathcal{T}^*)$ *este un spațiu topologic compact.*

Să arătăm, în primul rînd, că $\mathcal{T}^*$ este o topologie pentru X^*. Fie G', G'' două elemente din $\mathcal{T}^*$. Dacă $G' \in \mathcal{T}$, $G'' \in \mathcal{T}$, atunci $G' \cap G'' \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. Dacă una cel puțin din mulțimile G', G'', de exemplu G', nu aparține lui $\mathcal{T}$, atunci $\infty \in G'$ și complementara lui G' în X^*, sau a lui $G' - \{\infty\}$ în X este o mulțime închisă și compactă.

Avem, în acest caz, dacă $G'' \in \mathcal{T}$,

$$G' \cap G'' \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*.$$

Dacă $G' \notin \mathcal{T}$, $G'' \notin \mathcal{T}$, atunci

$$\infty \in G' \cap G''.$$

Deducem

$$\mathbf{C}(G' \cap G'') = \mathbf{C}G' \cup \mathbf{C}G''$$

și mulțimea din dreapta este un compact, ca reuniune a două compacte deci $G' \cap G'' \in \mathcal{T}^*$.

Fie acum $\{G_i\}_{i \in I}$ o familie de elemente din $\mathcal{T}^*$. Dacă ∞ nu aparține nici unui G_i, atunci

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*.$$

Dacă există un indice $i_0 \in I$ pentru care $\infty \in G_{i_0}$, atunci

$$\mathbf{C} \bigcup_{i \in I} G_i = \bigcap_{i \in I} \mathbf{C}G_i \subseteq \mathbf{C}G_{i_0}.$$

Dar

$$\mathbf{C} \bigcup_{i \in I} G_i = X - \left(\bigcup_{i \in I} (G_i - \{\infty\}) \right),$$

de unde rezultă că $\mathbf{C} \bigcup_{i \in I} G_i$ este o mulțime închisă (în X). Cum această mulțime este o parte a compactului $\mathbf{C}G_{i_0}$, rezultă că ea însăși este o mulțime compactă, de unde

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}^*.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\mathcal{T}^*$ este o topologie pentru X.
Rămîne să arătăm că spațiul $(X^*, \mathcal{T}^*)$ este compact. Fie G^* o acoperire deschisă a lui X^* și $G^*_\infty \in \mathcal{G}^*$ astfel încît $G^*_\infty \ni \infty$.

Să punem

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^* - \{G^*_\infty\}.$$

Mulțimea $X^* - G^*_\infty$ este un compact al spațiului X. Deci $\mathcal{G}$ conține o subacoperire finită

$$G_1, G_2, \ldots, G_n$$

a mulțimii $X^* - G^*_\infty$, iar

$$G_1, G_2, \ldots, G_n, G^*_\infty$$

va constitui o acoperire *finită a* spațiului X^*, extrasă din $\mathcal{G}^*$. Așadar $(X^*, \mathcal{T}^*)$ este un spațiu compact.

O b s e r v a ț i e. Elementul „∞" adăugat se numește astăzi *punctul* de *compactificare al lui P. S Alexandrov.*

T e o r e m a II. (P. S. Alexandrov). *Spațiul* $(X^*, \mathcal{T}^*)$ *este separat dacă și numai dacă* $(X, \mathcal{T})$ *este un spațiu separat, local compact.*

Este evident că dacă $(X^*, \mathcal{T}^*)$ este un spațiu al lui Hausdorff, atunci $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu al lui Hausdorff. Fie $x \in X$. Există o vecinătate deschisă G_x a acestui punct și o vecinătate deschisă G_∞ a punctului ∞, astfel încît $G_x \cap G_\infty = \emptyset$.

Mulțimea

$$X^* - G_\infty \supseteq G_x$$

este o vecinătate compactă a lui x, deci $(X, \mathcal{T})$ este local compact.

Reciproc, să presupunem că $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu al lui Hausdorff, local compact. Pentru a arăta că $(X^*, \mathcal{T}^*)$ este un spațiu al lui Hausdorff, este suficient să arătăm că pentru orice punct $x \in X$, punctele x și ∞ au vecinătăți disjuncte. Dar X fiind local compact, există o vecinătate V_x a lui x, compactă (în raport cu X). Cum orice parte compactă a unui spațiu T_2 este închisă (2.8.2. teorema II), V_x este în același timp compactă și închisă, iar

$$G^*_\infty = X^* - V_x$$

este o mulțime deschisă a spațiului X^*, care conține punctul ∞. Deci G^*_∞ este o vecinătate a acestui punct, disjunctă de V_x.

Scanned with OKEN Scanner

§ 10. SPAȚII TOPOLOGICE REGULATE. SPAȚII NORMALE. TEOREMELE LUI URÎSON. TEOREMA DE PRELUNGIRE A LUI TIETZE

2.10.1. Spațiile T_2 se definesc printr-o proprietate de „separare" a punctelor, cu ajutorul mulțimilor deschise. Dacă înlocuim unul din puncte sau ambele printr-o mulțime închisă, obținem două clase noi de spații topologice. Vom consacra acest paragraf acestor două clase de spații topologice.

Prin definiție, un spațiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este *regulat* dacă pentru orice mulțime închisă $F \subset X$ și pentru orice punct $x \notin F$ există două mulțimi deschise *disjuncte*, una conținînd mulțimea F și cealaltă punctul x[1].

O definiție echivalentă rezultă din următoarea

Teoremă. *Un spațiu $(X, \mathcal{T})$ este regulat dacă și numai dacă pentru orice pereche (x, G) formată din un punct $x \in X$ și o mulțime deschisă $G \ni x$ există o mulțime deschisă $G' \ni x$, astfel încît $\overline{G'} \subseteq G$.*

Să presupunem condiția din enunț satisfăcută și să considerăm o mulțime închisă F și un punct $x \notin F$. Deci $x \in G$, unde $G = \complement F$.

Atunci există o mulțime deschisă G', astfel încît

$$x \in G' \text{ și } \overline{G'} \subseteq G.$$

Să punem $G'' = \complement\overline{G'}$. Mulțimea G'' este disjunctă de G', deci cu atît mai mult de G', este deschisă și avem $G' \supseteq \complement G = F$.

Reciproc, să presupunem spațiul $(X, \mathcal{T})$ regulat.

Fie $x \in X$ și G o mulțime deschisă care conține punctul x. Mulțimea $F = \complement G$ este închisă și avem $x \notin F$. Există, deci, două mulțimi G', G'' deschise, disjuncte și astfel încît

$$x \in G', \ F \subseteq G''.$$

Dar $G' \cap G'' = \emptyset$ implică $G' \subseteq \complement G''$, de unde

$$\overline{G'} \subseteq \complement G'' \subseteq \complement F = G.$$

2.10.2. Un spațiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este *normal*[2] dacă pentru orice pereche (F_1, F_2) de mulțimi închise și disjuncte ale acestuia, există o pereche (G_1, G_2) de mulțimi deschise, astfel încît

$$G_1 \supseteq F_1, \ G_2 \supseteq F_2, \ G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

O definiție echivalentă rezultă din următoarea

---

[1] Un spațiu regulat care este în același timp și un spațiu T_1 se numește un spațiu T_3. Evident, orice spațiu T_3 este un spațiu T_2.

[2] Un spațiu normal, care este în același timp un spațiu T_1, se numește un spațiu T_4. Un spațiu T_4 este un spațiu T_3 (exercițiu!).

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă. *Un spațiu topologic* $(X, \mathcal{T})$ *este normal dacă și numai dacă pentru orice mulțime închisă* F *și pentru orice mulțime deschisă* $G \supseteq F$ *există o mulțime deschisă* G', *astfel încît*

$$F \subseteq G', \quad \overline{G'} \subseteq G.$$

Să presupunem spațiul X normal și să considerăm o mulțime închisă F, precum și o mulțime deschisă $G \supseteq F$.
Mulțimea $F' = X - G$ este închisă și disjunctă de F. Există deci două vecinătăți deschise G_F, $G_{F'}$ ale acestor mulțimi, disjuncte între ele.

Din $G_F \subseteq X - G_{F'}$, deducem

$$\overline{G_F} \subseteq \overline{X - G_{F'}} = X - G_{F'} \subseteq X - F' = G.$$

Mulțimea G_F îndeplinește deci condițiile cerute. Reciproc, să presupunem cele două condiții ale enunțului satisfăcute și să considerăm două mulțimi F_1, F_2 închise și disjuncte. Aceasta înseamnă că $F_1 \subseteq \complement F_2$ și cum $\complement F_2$ este o mulțime deschisă, există o mulțime deschisă G' astfel încît $F_1 \subseteq G'$ și $G' \subseteq \complement F_2$. Deducem $\complement \overline{G'} \supseteq F_2$. Dar $\complement \overline{G'}$ este o mulțime deschisă, disjunctă de G'. Așadar $(X, \mathcal{T})$ este un spațiu normal.

2.10.3. Deși orice spațiu T_4 (adică normal și T_1) este un spațiu T_3 (adică: regulat și T_1), de aici nu rezultă că orice spațiu normal este regulat.

În fapt, se pot da exemple simple de spații normale care *nu* sînt regulate. Să considerăm mulțimea[1]

$$X = \{a, b, c\}$$

cu topologia $\mathcal{T}$ formată din mulțimile

$$\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}.$$

Mulțimile închise ale acestui spațiu sînt

$$X, \emptyset, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}.$$

Perechile de mulțimi închise disjuncte ale acestui spațiu sînt

$$(\emptyset, \{b, c\}), (\emptyset, \{a, c\}), (\emptyset, \{c\}).$$

Perechile de mulțimi deschise disjuncte care le conțin sînt, respectiv

$$(\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{a, b\}).$$

Acest spațiu este deci normal. Dar el nu este regulat, deoarece pentru mulțimea închisă $\{a, c\}$ și punctul $b \notin \{a, c\}$ nu există două mulțimi deschise care să le separe.

---

[1] Acest exemplu este împrumutat din monografia — citată la p. 81 — a lui W. Pervin (p. 39, problema 6).

Scanned with OKEN Scanner

2.10.4. Lema lui Urîson. *Un spațiu topologic* $(X, \mathfrak{T})$ *este normal dacă și numai dacă pentru orice pereche* (F_1, F_2) *de mulțimi închise disjuncte și pentru orice interval* $[a, b]$ *există o aplicație continuă* $f: X \to [a, b]$, *astfel încît* $f(F_1) = \{a\}$, $f(F_2) = \{b\}$.

În primul rînd vom observa că este suficient să ne restrîngem la un interval unic, și anume la intervalul $[0, 1]$. Să presupunem în adevăr că există o aplicație continuă $f: X \to [0, 1]$, astfel încît $f(F_1) = \{0\}$, $f(F_2) = \{1\}$. Mulțimile $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ sînt deschise și disjuncte. Deci $G_1 = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$, $G_2 = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ sînt deschise, disjuncte și avem $G_1 \supseteq F_1$, $G_2 \supseteq F_2$, deci X este normal. Reciproc, dacă X este normal, F_1 și F_2 două mulțimi închise și disjuncte ale acestui spațiu și $[a, b]$ un interval, $h: x \to (b - a)x + a$ este un homeomorfism al intervalului $[0, 1]$ pe $[a, b]$. Dacă deci reușim să construim o aplicație continuă $g: X \to [0, 1]$ astfel încît $g(F_1) = \{0\}$, $g(F_2) = \{1\}$, aplicația $f = h \circ g$ va fi aplicația căutată. Să definim, în acest scop, o familie $\{G_r\}_{r \in Q}$ de mulțimi deschise, cu proprietatea următoare:

$$r < s \Rightarrow \overline{G_r} \subseteq G_s.$$

Vom proceda în felul următor: Pentru $r < 0$ vom pune $G_r = \emptyset$, iar pentru $r > 1$ vom pune $G_r = X$.

De asemenea, vom defini pe G_1 prin egalitatea $G_1 = X - F_2$. Să observăm că $G_1 \supseteq F_1$. În baza teoremei din 2.10.1., există o mulțime deschisă care conține pe F_1 și a cărei aderență este conținută în G_1. Aceasta va fi, prin definiție, mulțimea G_0. Pentru $r \in (0, 1)$ vom proceda astfel: fie $\{r_n\}_{n \in N}$ mulțimea raționalelor pozitive subunitare, cu $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Pentru $n \geqq 3$ vom defini șirul $\{G_{r_n}\}$ notînd cu r_j pe cel mai mic și cu r_i pe cel mai mare rațional, astfel încît $i < n$, $j < n$, $r_i < r_n < r_j$. Mulțimea G_{r_n} va fi definită astfel încît

$$\overline{G}_{r_i} \subseteq G_{r_n}, \quad \overline{G}_{r_n} \subseteq G_{r_j}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vom pune $g(x) = \inf \{r : x \in G_r\}$. Avem, în primul rînd, $g(X) \subseteq [0, 1]$. În al doilea rînd vom observa că dacă $g(x) < \beta$, există G_r (cu $r < \beta$) astfel încît $x \in G_r$.

Reciproc, dacă există G_r, cu $r < \beta$, astfel încît $x \in G_r$, atunci $g(x) < \beta$.

În al treilea rînd, dacă există $r > \alpha$ astfel încît $x \notin \overline{G_r}$, atunci $g(x) > \alpha$. Reciproc, dacă $g(x) > \alpha$, atunci există $r > \alpha$ astfel încît $x \notin \overline{G_r}$. De aici rezultă că

$$\{x : g(x) < \beta\} = \bigcup \{G_r : r < \beta\},$$
$$\{x : g(x) > \alpha\} = \bigcup \{\complement \overline{G_r} : r > \alpha\},$$

deci

$$\{x : \alpha < g(x) < \beta\}$$

este o mulțime deschisă și g este o funcție continuă.

Este vizibil că $g(F_1) = \{0\}$ și $g(F_2) = \{1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.10.5. Teorema de prelungire a lui Tietze. *Fie $(X, \mathfrak{T})$ un spațiu topologic normal, F o parte închisă a sa și $f: F \to R$ o aplicație continuă. Există o aplicație continuă $f^*: X \to R$, astfel încît $f^*|F = f$ și din $|f(x)| \leqq \mu_0$ rezultă $|f^*(x)| \leqq \mu_0$.*

Să presupunem, în primul rînd, funcția f mărginită și fie $|f| \leqq \mu_0$. Vom pune

$$F_0' = \left\{x : f(x) \leqq -\frac{\mu_0}{3}\right\}, \quad F_0'' = \left\{x : f(x) \geqq \frac{\mu_0}{3}\right\}.$$

Mulțimile F_0', F_0'' sînt închise și disjuncte. Potrivit lemei lui Urîson, există o funcție $g_0: X \to R$ continuă, egală cu $-\frac{\mu_0}{3}$ pe F_0', cu $+\frac{\mu_1}{3}$ pe F_0'' și astfel încît $|g_0(x)| \leqq \frac{1}{3}\mu_0$. Vom pune $f_0 = f$, $f_1 = f_0 - g_0$. Funția f_1 este continuă pe F și avem $|f_1| \leqq \frac{2}{3}\mu_0 = \mu_1$. Fie $F_1' = \{x; f_1(x) \leqq -\mu_1/3\}$, $F_1'' = \{x; f_1(x) \geqq \mu_1/3\}$. Mulțimile F_1', F_1'' sînt închise și disjuncte. Există deci o funcție $g_1: X \to R$, continuă pe X, egală cu $-\mu_1/3$ pe F_1', cu $\mu_1/3$ pe F_0'' și astfel încît $|g_1(x)| \leqq \mu_1/3$ pentru orice $x \in X$.

Vom pune $f_2 = f_1 - g_1$, de unde $|f_2| \leqq \frac{2}{3}\mu_1 = \mu_2$.

Raționamentul poate fi continuat indefinit. Obținem, pe de o parte, șirul de funcții continue $\{f_n\}$ definite pe F, iar, pe de altă parte, șirul de funcții continue $\{g_n\}$ definite pe întregul spațiu X, cu proprietățile următoare:

1) $$|f_n(x)| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0, \quad |g(x)| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3}$$

2) $$f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_n(x), \text{ dacă } x \in F.$$

Seria $\Sigma g_n(x)$ este uniform convergentă, fiind majorată de seria numerică $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3}$. Deci funcția

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

este continuă în tot spațiul și avem

$$|f^*(x)| \leqq \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0.$$

Pe de altă parte

$$(f^*|F)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(x) - f_{n+1}(x)] = f_0(x) = f(x).$$

Teorema lui Tietze este deci demonstrată în cazul în care f este mărginită pe F.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă f nu este mărginită pe F, vom considera homeomorfismul $h: R \to (-1, +1)$ definit pentru orice $x \in R$ de egalitatea $h(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} x$. Funcţia $h \circ f$ este continuă şi *mărginită* pe F (anume $|h \circ f| \leqq 1$). Deci, în baza primei părţi a demonstraţiei, există o aplicaţie continuă $\varphi^*: X \to R$, astfel încît restricţia sa la F să fie $h \circ f$ şi $|\varphi^*(x)| \leqq 1$, oricare ar fi $x \in R$. Este suficient să punem $f = h^{-1} \circ \varphi^*$.

2.10.6. Teoremă. (P. Urîson): *Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu normal şi regulat, atunci pentru orice mulţime închisă F a acestui spaţiu şi orice punct $x \notin F$ există o aplicaţie $f: X \to [0, 1]$ continuă, egală cu 1 în orice punct din F şi cu zero în punctul x.*

În adevăr, dacă $x \notin F$, atunci $x \in G$, cu $G = \mathbf{C}F$. Spaţiul fiind regulat, există o mulţime deschisă $G' \ni x$, astfel încît $\overline{G'} \subseteq G$. Mulţimile *închise* F şi $\overline{G'}$ sînt vizibil disjuncte, deci — în baza lemei lui Urîson — există o aplicaţie $f: X \to [0, 1]$ continuă, egală cu 1 pe mulţimea F şi cu zero pe mulţimea G'. Cum $x \in G'$, rezultă că $f(x) = 0$ şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Un spaţiu cu proprietatea din enunţ se numeşte un spaţiu *complet regulat*.

Exerciţiu. Să se arate că orice spaţiu complet regulat este regulat.

2.10.7. Vom spune că un spaţiu $(X, \mathcal{T})$ este *complet normal* dacă orice parte Y a acestuia, cu topologia $\mathcal{U}$ indusă de $\mathcal{T}$, este un spaţiu normal.

Rezultă imediat din această definiţie că *orice parte a unui spaţiu complet normal este un subspaţiu complet normal*[1].

O definiţie echivalentă rezultă din următoarea

Teoremă. *Un spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ este complet normal dacă şi numai dacă pentru orice pereche (A, B) de mulţimi separate ale acestuia, există două mulţimi deschise G_A, G_B astfel încît*

$$G_A \supseteq A,\ G_B \supseteq B,\ G_A \cap G_B = \emptyset. \tag{1}$$

În adevăr, să presupunem spaţiul considerat complet normal şi să considerăm două mulţimi A, B separate ale acestui spaţiu. Să punem

$$Y = \mathbf{C}(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Ca subspaţiu al lui X, Y este normal.

Mulţimile

$$Y \cap \overline{A},\ Y \cap \overline{B}$$

[1] William J. Pervin. *(Foundations of General Topology.)* 1964, găseşte, pe bună dreptate, că aceste spaţii ar fi putut fi mai corect numite „ereditar normale".

Scanned with OKEN Scanner

sînt închise în raport cu Y și *disjuncte*. Deci există două mulțimi G_A, G_B deschise în raport cu Y, deci deschise în X (deoarece Y este o mulțime deschisă !), *disjuncte* și astfel încît

$$G_A \supseteq Y \cap \overline{A}, \quad G_B \supseteq Y \cap \overline{B}.$$

Dar, evident

$$Y \cap \overline{A} = (\mathbf{C}\,\overline{A} \cup \mathbf{C}\,\overline{B}) \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \mathbf{C}\,\overline{B},$$

iar, pe de altă parte, din $A \cap \overline{B} = \emptyset$ deducem $A \subseteq \mathbf{C}\overline{B}$, deci — în definitiv —

$$A \subseteq Y \cap \overline{A} \subseteq G_A$$

și tot astfel

$$B \subseteq Y \cap \overline{B} \subseteq G_B,$$

și condiția din enunț este îndeplinită.

Reciproc, să presupunem această condiție îndeplinită și să considerăm o parte $Y \subset X$.

Vom arăta că Y este, cu topologia indusă de $\mathcal{T}$, un spațiu normal. Fie F' și F'' două părți disjuncte ale lui Y, închise în raport cu Y.

Vom avea

$$F' \cap \overline{F''} = (Y \cap \overline{F'}) \cap \overline{F''} = (Y \cap \overline{F'}) \cap (Y \cap \overline{F''}) = F' \cap F'' = \emptyset.$$

La fel,

$$\overline{F'} \cap F'' = \emptyset.$$

Deci F' și F'' sînt două mulțimi *separate* ale spațiului $(X, \mathcal{T})$. Atunci, în baza condițiilor (1), există două mulțimi deschise G', G'', astfel încît

$$G' \supseteq F', \; G'' \supseteq F'', \; G' \cap G'' = \emptyset.$$

Mulțimile $Y \cap G'$ și $Y \cap G''$ sînt disjuncte, deschise în raport cu Y, și avem

$$Y \cap G' \supseteq F', \quad Y \cap G'' \supseteq F'',$$

deci Y este normal. Cum Y este o parte arbitrară a lui X, rezultă că X este complet normal.

Observație. Din teorema precedentă rezultă că un spațiu complet normal este normal.

CAPITOLUL III

SPAȚII METRICE

§ 1. DEFINIȚII. EXEMPLE

3.1.1. Fie X o mulțime. Orice aplicație

$$d : X \times X \to R$$

cu proprietățile următoare

$M_1 \cdot d(x, y) = 0$, dacă și numai dacă $x = y$;

$M_2 \cdot d(x, y) = d(y, x)$;

$M_3 \cdot d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice sistem x, y, z de puncte din X, se numește o *distanță*, sau o *metrică*, în X.

O mulțime X în care s-a definit o metrică d se numește un spațiu metric. Vom nota deseori un spațiu metric (X, d), punînd astfel în evidență funcția d.

Axioma M_3 se mai numește, pentru motive evidente, și *axioma triunghiului*.

3.1.2. *Exemple de spații metrice:*

1° Orice mulțime X poate deveni un spațiu metric, dacă se definește distanța astfel:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y, \\ 0, & \text{dacă } x = y. \end{cases}$$

Se constată imediat că această funcție verifică axiomele M_1, M_2, M_3, deci (X, d) este un spațiu metric.

2° Spațiul $\mathbf{R}^q$ al sistemelor ordonate de q numere reale

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$$

Scanned with OKEN Scanner

numit și spațiul *numeric* cu q dimensiuni, devine un spațiu metric, dacă se pune

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{q} (x_k - y_k)^2},$$

unde

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\},$$
$$y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}.$$

Axiomele M_1, M_2 sînt vizibil verificate. În ce privește axioma triunghiului, vom folosi inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski:

$$\left(\sum_{k=1}^{q} a_k b_k\right)^2 \leqq \sum_{k=1}^{q} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{q} b_k^2.$$

Vom pune, anume,

$$y_k - x_k = a_k, \quad z_k - y_k = b_k,$$

de unde

$$z_k - x_k = a_k + b_k.$$

Avem, cu aceste notații,

$$d^2(x, z) = \sum_{k=1}^{q} (z_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{q} (a_k + b_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{q} a_k b_k + \sum_{k=1}^{q} b_k^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{q} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{q} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{q} b_k^2} + \sum_{k=1}^{q} b_k^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{q} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{q} b_k^2}\right)^2 = (d(x, y) + d(y, z))^2.$$

Spațiul $\mathbf{R}^q$ astfel metrizat se numește *spațiul euclidian real* cu q dimensiuni

3° În același spațiu numeric $\mathbf{R}^q$ să punem

$$d(x, y) = \max |y_k - x_k|, \; k = 1, 2, \ldots, q.$$

Axiomele M_1, M_2 sînt vizibil verificate. În ce privește axioma M_3, avem, pentru orice $k \leqq q$,

$$|z_k - x_k| \leqq |z_k - y_k| + |y_k - x_k|,$$

de unde, cu atît mai mult,

$$|z_k - x_k| \leqq d(y, z) + d(x, y), \qquad k = 1, 2, \ldots, q,$$

peci

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z).$$

4° Să considerăm mulţimea funcţiilor continue $K \to R$, unde K este un compact, şi să punem pentru două elemente x, y ale acestei mulţimi

$$d(x, y) = \sup_{t \in K} |x(t) - y(t)|.$$

Funcţia astfel definită verifică în mod vizibil axiomele M_1, M_2. Pentru axioma M_3 vom observa că avem, pentru orice $t \in K$,

$$|z(t) - x(t)| \leqq |z(t) - y(t)| + |y(t) - x(t)|,$$

de unde

$$|z(t) - x(t)| \leqq d(x, y) + d(y, z),$$

oricare ar fi $t \in K$, deci

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z).$$

Spaţiul metric astfel construit se numeşte spaţiul funcţiilor continue reale şi se notează $\mathcal{C}(K; \mathbf{R})$. Se pune, în particular,

$$\mathcal{C}_{[0,1]} = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbf{R}).$$

5° Să considerăm mulţimea şirurilor infinite de numere reale

$$x = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

pentru care

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty.$$

Din inegalitatea evidentă

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{q} (y_k - x_k)^2} \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{q} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{q} y_k^2} \tag{1}$$

deducem, pentru $q \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2 < \infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom pune

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}$$

și vom arăta că această funcție definește, în mulțimea considerată, o metrică. Axiomele M_1, M_2 sînt în mod vizibil verificate. Să considerăm acum trei *puncte* ale spațiului:

$$a = (a_1, a_2, \ldots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty,$$

$$b = (b_1, b_2, \ldots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty,$$

$$c = (c_1, c_2, \ldots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

În inegalitatea (1) putem face $q \to \infty$, obținînd

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2}.$$

Să schimbăm pe x în $-x$, apoi să punem $b_k - c_k = x_k$, $a_k - b_k = y_k$. Inegalitatea precedentă devine

$$d(a, c) \leqq d(a, b) + d(b, c).$$

Spațiul metric astfel construit se notează l_2.

Exerciții. 1° În spațiul numeric $\mathbf{R}^q$ se pune

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{q} |x_k - y_k|.$$

Funcția astfel definită constituie o metrică pentru $\mathbf{R}^q$.

2° Fie $\mathbf{F}$ mulțimea tuturor șirurilor infinite de numere reale. Dacă

$$x = \{x_1, x_2, \ldots\}, \quad y = \{y_1, y_2, \ldots\}$$

se pune

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Să se arate că d este o distanță în mulțimea $\mathbf{F}$.

3° Să se arate că distanța $d(x, y)$ într-un spațiu metric (X, d) este o funcție continuă de fiecare din argumentele sale.

Scanned with OKEN Scanner

R. Fie (x, y), (x', y) două perechi de puncte.

Avem

$$d(x, y) \leqq d(x, x') + d(x', y),$$

de unde

$$d(x, y) - d(x', y) \leqq d(x, x')$$

și tot astfel

$$d(x', y) - d(x, y) \leqq d(x, x'),$$

de unde

$$|d(x', y) - d(x, y)| \leqq d(x, x').$$

4° Dacă (X, d) este un spațiu metric și $E \subseteq X$, diametrul $\delta(E)$ al mulțimii E este definit de egalitatea

$$\delta(E) = \sup \{d(x, y) : x \in E,\ y \in E\}.$$

Să se arate că: *a*) $E \subseteq F$ implică $\delta(E) \leqq \delta(F)$, *b*) $\delta(E) = \delta(\overline{E})$; *c*) $\delta(E) = 0$ dacă și numai dacă E conține cel mult un punct.

R: Vom stabili numai punctul *b*).

Evident $\delta(\overline{E}) \geqq \delta(E)$, deoarece $\overline{E} \supseteq E$. Să presupunem $\delta(\overline{E}) > \delta(E)$ și să punem $\varepsilon = \delta(\overline{E}) - \delta(E)$. Prin definiție, există o pereche de puncte (x', y') din $\overline{E}$, astfel încît

$$\frac{\varepsilon}{2} < d(x', y') \leqq \delta(\overline{E}).$$

Pe de altă parte, bula $B\left(x', \frac{\varepsilon}{4}\right)$ conține un punct $x \in E$, iar bula $B\left(y'; \frac{\varepsilon}{4}\right)$ conține un punct $y \in E$. Vom avea

$$d(x', y') < d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') < d(x, y) + \varepsilon,$$

de unde $|d(x', y) - d(x, y)| < \varepsilon$, deci

$$d(x, y) > d(x', y') - \frac{\varepsilon}{4} > \delta(E),$$

ceea ce este absurd.

5° Fie (X, d) spațiul metric în care $X = \mathbf{R}^2$, iar $d(x, y) = |x' - y'| + |x'' - y''|$, unde $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$.

Să se determine bula $B(O; r)$, unde $O = (0, 0)$.

R: Trebuie să determinăm punctele $x = (x', x'')$ pentru care $|x'| + |x''| < r$. Se găsește interiorul pătratului cu centrul în origine și cu vîrfurile respective în punctele $(r, 0)$, $(0, r)$, $(-r, 0)$, $(0, -r)$.

6° Un spațiu metric este, cu topologia indusă de metrica sa, un spațiu T_1.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. TOPOLOGIZAREA UNUI SPAȚIU METRIC

3.2.1. Într-un spațiu metric (X, d) putem introduce, în mod natural, o topologie $\mathcal{T}$ în felul următor:

Vom numi *bilă* (sau sferă plină) cu centrul în punctul $x_0 \in X$ și cu raza r, mulțimea

$$B(x_0 ; r) = \{x : d(x, x_0) < r\}.$$

Vom spune că un punct $x_0 \in A \subseteq X$ este *interior* mulțimii A dacă există o bilă $B(x_0 ; r)$ astfel încît

$$x_0 \in B(x_0 ; r) \subseteq A.$$

Vom nota cu $\operatorname{Int} A$ mulțimea punctelor interioare unei mulțimi A. Prin definiție, o mulțime A este deschisă dacă

$$A = \operatorname{Int} A.$$

Exemple: Spațiul X și mulțimea vidă sînt mulțimi deschise.

Teorema I. *Orice bilă este o mulțime deschisă.*

În adevăr, fie $B(x, r)$ o bilă și $y \in B(x ; r)$, $y \neq x$. Fie, de asemenea, r' un număr pozitiv supus la singura condiție

$$r' < r - d(x, y).$$

Vom arăta că $B(y ; r') \subseteq B(x ; r)$.

În adevăr, dacă $z \in B(y ; r')$, avem

$$d(z, x) \leqq d(z, y) + d(y, x) < r' + (r - r') = r.$$

Teorema II. *Intersecția a două mulțimi deschise este o mulțime deschisă.*

Fie G_1, G_2 două mulțimi deschise cu intersecția nevidă și

$$x_0 \in G_1 \cap G_2.$$

Prin ipoteză, există două bile $B(x_0 ; r_1)$, $B(x_0 ; r_2)$ astfel încît

$$x_0 \in B(x_0 ; r_1) \subseteq G_1,$$

$$x_0 \in B(x_0 ; r_2) \subseteq G_2.$$

Dacă $r = \min(r_1, r_2)$, atunci

$$x_0 \in B(x ; r) \subseteq \begin{cases} G_1 \\ G_2 \end{cases}$$

și $G_1 \cap G_2$ este o mulțime deschisă.

Teorema III. *Orice reuniune de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.*

Fie $$G = \bigcup_{i \in I} G_i,$$

unde G_i sînt mulţimi deschise. Fie, de asemenea, $x_0 \in G$. Aceasta înseamnă că există un indice $i_0 \in I$, astfel încît $x_0 \in G_{i_0}$, deci o bulă $B(x_0 ; r_0)$, astfel încît

$$x_0 \in B(x_0 ; r_0) \subseteq G_{i_0} \subseteq G.$$

3.2.2. Din analiza precedentă rezultă că familia mulţimilor pe care le-am numit anticipativ[1] deschise formează o topologie $\mathcal{T}$ pentru spaţiul metric (X, d). Această topologie se numeşte topologia *indusă pe* X *de metrica* d. Din cele de mai sus rezultă că toate proprietăţile stabilite în capitolul II pentru spaţiile topologice generale vor fi în particular valabile pentru spaţiile metrice cu topologia introdusă mai sus. Mai mult decît atît, ne putem aştepta ca spaţiile metrice, ca spaţii topologice particulare, să aibă unele proprietăţi pe care nu le au *toate* spaţiile topologice. Vom da mai jos cîteva exemple de astfel de proprietăţi.

Teorema I. *Un spaţiu metric este un spaţiu al lui Hausdorff*

În adevăr, fie (X, d) spaţiul metric considerat, $x \in X$, $y \in X$, $x \neq y$. Fie, de asemenea, r' şi r'' două numere pozitive supuse la condiţia

$$r' + r'' < d(x, y). \tag{1}$$

Bulele $B(x, r')$, $B(y ; r'')$ constituie două vecinătăţi respectiv pentru x şi y. Ele sînt disjuncte. În adevăr, dacă ar exista un punct

$$z \in B(x ; r') \cap B(y ; r''),$$

am avea

$$d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y) \leqq r' + r'',$$

ceea ce contrazice relaţia (1).

Pentru enunţarea teoremei următoare, avem nevoie de o definiţie: Dacă (X, d) este un spaţiu metric, $E \subset X$ şi $x \notin E$, atunci numărul pozitiv

$$d(x, E) = \inf \{d(x, y) : y \in E\}$$

se numeşte *distanţa* punctului x la mulţimea E.

Cu această definiţie, putem enunţa

[1] Termenul „anticipativ" se referă la ordonarea materialului din acest curs. Istoriceşte mulţimile deschise, definite numai pentru spaţiile euclidiene, au fost introduse în acelaşi mod în care le-am introdus noi în acest alineat.

Teorema II. *Dacă (X, d) este un spațiu metric, E o parte a sa și $x \notin E$, distanța $d(x, E)$ este o funcție continuă de x. În plus, $d(x, E) = 0$ dacă și numai dacă $x \in \overline{E}$. În sfîrșit, $d(x, E) = d(x, \overline{E})$.*

Într-adevăr, fie $x \notin E$, $x' \notin E$, $x \neq x'$ și $y \in E$, altfel arbitrar. Avem, în baza inegalității triunghiului,

$$d(x, y) \leqq d(x, x') + d(x', y),$$

de unde

$$d(x, E) \leqq d(x, x') + d(x', y)$$

și apoi

$$d(x, E) \leqq d(x, x') + d(x', A).$$

Așadar

$$d(x, E) - d(x', E) \leqq d(x, x').$$

Membrul al doilea fiind simetric în x, x', avem, de asemenea,

$$d(x', E) - d(x, E) \leqq d(x, x'),$$

de unde continuitatea funcției $d(x, E)$.

Să presupunem acum $x \in \overline{E}$. Atunci, evident, $d(x, E) = 0$. Reciproc, dacă $d(x, E) = 0$, atunci $x \in E$, sau x este punct de acumulare al lui E, deci $x \in \overline{E}$.

Pentru demonstrarea părții a treia, să observăm, în primul rînd, că $\overline{E} \supseteq E$ implică $d(x, \overline{E}) \leq d(x, E)$. Apoi, dacă $y \in \overline{E}$, atunci $d(x, y)$ este o funcție continuă de y, definită pe *compactul* $\overline{E}$[1]. Deci există un punct $\overline{y} \in \overline{E}$ astfel încît

$$d(x, \overline{E}) = d(x, \overline{y}).$$

Fie, acum $y \in E$, altfel arbitrar. Avem

$$d(x, \overline{E}) = d(x, \overline{y}) \geqq d(x, y) - d(y, \overline{y}) \geqq d(x, E) - d(y, \overline{y}),$$

de unde

$$d(x, \overline{E}) \leqq d(x, E) \leqq d(x, \overline{E}) + d(y, \overline{y}).$$

Cum $\overline{y}$ este un punct de acumulare pentru E, rezultă că $d(y, \overline{y})$ poate fi făcut arbitrar de mic, deci $d(x, E) = d(x, \overline{E})$.

[1] Să nu uităm că (X, d) este un spațiu al lui Hausdorff, deci orice parte închisă a sa este compactă.

Teorema III. *Un spațiu metric este complet normal.*

Fie, în adevăr, A și B două mulțimi separate ale spațiului metric (X, d). Avem $A \cap \overline{B} = \emptyset$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$, deci $x \in A$ implică $x \notin \overline{B}$, și $y \in B$ implică $y \notin \overline{A}$.

Pentru fiecare $x \in A$ există deci în baza teoremei II un număr pozitiv r_x, astfel încît

$$B(x\,;\, r_x) \cap B = \emptyset.$$

La fel, pentru fiecare $y \in B$ există un număr pozitiv r_y, astfel încît

$$B(y\,;\, r_y) \cap A = \emptyset.$$

Să punem, respectiv,

$$G_1 = \bigcup \left\{ B\left(x\,;\ \frac{r_x}{2}\right) : x \in A \right\},$$

$$G_2 = \bigcup \left\{ B\left(y\,;\ \frac{r_y}{2}\right) : y \in B \right\}.$$

Avem, evident, $G_1 \supseteq A$, $G_2 \supseteq B$. Să presupunem că aceste mulțimi deschise nu ar fi disjuncte și să considerăm un punct $z \in G_1 \cap G_2$. Există deci o sferă $B\left(x_1\,;\ \frac{r_{x_1}}{2}\right)$ și o sferă $B\left(y_1\,;\ \frac{r_{y_1}}{2}\right)$ care conțin punctul z. Am avea deci, pe de-o parte, $d(z, x_1) < \frac{r_{x_1}}{2}$, $d(z, y_1) < \frac{r_{y_1}}{2}$, iar, pe de altă parte,

$$d(x_1, y_1) \leqq d(x_1, z) + d(z, y_1) < \frac{r_{x_1}}{2} + \frac{r_{y_1}}{2}.$$

Deci, dacă $r_{x_1} \leqq r_{y_1}$, am avea $d(x_1, y_1) < r_{y_1}$, de unde $x_1 \in B(y_1, r_{y_1})$, iar dacă $r_{y_1} \leqq r_{x_1}$, am avea $d(x_1, y_1) < r_{x_1}$, de unde $y_1 \in B(x_1\,;\, r_{x_1})$.

În primul caz am avea $B(y, r_{y_1}) \cap A \neq \emptyset$, iar în al doilea caz $B(x_1, r_{x_1}) \cap \cap B \neq \emptyset$.

Contradicția obținută demonstrează teorema.

3.2.3. Am arătat mai sus (2.2.2.) că orice spațiu topologic cu bază numerabilă este de tip numerabil. Am pus, de asemenea, în evidență, printr-un exemplu, faptul că reciproca acestei propoziții nu este *totdeauna* adevărată. Pentru spațiile metrice totuși această reciprocă este valabilă.

Teoremă. *Orice spațiu metric de tip numerabil are o bază numerabilă.*

Fie, în adevăr, (X, d) un spațiu metric de tip numerabil și

$$D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

o mulțime numerabilă, densă în X.

Să punem

$$\mathfrak{B} = \left\{B\left(x_n, \frac{1}{m}\right)\right\}_{m,n \in N}.$$

Familia $\mathfrak{B}$ este o familie numerabilă de mulţimi deschise. Ea constituie o bază (numerabilă) pentru X, deoarece pentru orice punct $x \in X$ şi orice mulţime deschisă G care conţine punctul x există o bulă $B(x; r) \subset G$. Dacă luăm numărul natural m astfel încît să avem $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$, atunci

$$B\left(x, \frac{1}{m}\right) \subseteq B(x; r) \subseteq G.$$

Cum D este densă în X, există un punct $x_n \in D$, astfel încît $d(x_n, x) < \frac{1}{m} < \frac{r}{2}$.

Atunci

$$x \in B\left(x_n, \frac{1}{m}\right) \subseteq G.$$

Exerciţii: 1° Să se pună în evidenţă pe un exemplu că aderenţa unei bule $B(x; r)$ nu coincide totdeauna cu mulţimea $\{y : d(x, y) \leqq r\}$.

R: În spaţiul (X, d), cu $d(x, y) = 1$ dacă $x \neq y$ şi $d(x, y) = 0$, dacă $x = y$ aderenţa bulei $B(x; 1)$ este mulţimea $\{x\}$, în timp ce $\{y; d(x, y) \leqq 1\} = X$.

2° Să punem, pentru un spaţiu metric (X, d) şi pentru orice parte E a sa

$$B(E; r) = \{x : d(x, A) < r\}.$$

Să se arate că $B(E; r)$ este o mulţime deschisă.

R: Fie $x \in B(E; r)$ şi $d(x, E) = r' < r$. Funcţia $x \to d(x, E)$ este continuă, deci există o bulă $B(x; \eta)$ astfel încît pentru orice punct $x' \in B(x; \eta)$ să avem $d(x', x) < r - r'$. Deducem

$$d(x', E) \leqq d(x, E) + d(x, x') < r - r' + r' = r,$$

deci $B(x; \eta) \subseteq B(E; r)$.

Observaţie. Mulţimea $B(E; r)$ se numeşte *bula generalizată* cu centrul pe mulţimea E şi cu raza r. Vom observa că $B(E; r) = B(\bar{E}; r)$.

3° Să se arate că

$$B(E; r) = \bigcup \{B(x; r) : x \in E\} = \bigcup \{B(x; r) : x \in \bar{E}\}.$$

R: Este evident că mulţimea din primul membru conţine celelalte două mulţimi. Fie $x \in B(E; r)$.

Deci $d(x, E) = r' < r$. Din definiţia numărului $d(x, E)$ rezultă că există un punct $y \in E$ astfel încît să avem $d(x, y) < r$. Dar atunci

$$x \in B(y; r) \subseteq \bigcup \{B(y; r) : y \in E\}.$$

4° Să se arate că $E \subseteq F$ implică $B(E; r) \subseteq B(F; r)$, oricare ar fi r.

5° Să se arate că pentru orice mulţime $E \subset X$ avem

$$\bar{E} = \bigcap \{B(E; r): r > 0\}.$$

6° Să se arate că într-un spaţiu metric (X, d) orice mulţime închisă F este o intersecţie numerabilă de mulţimi deschise.

$$R : F = \bigcap \left\{B\left(F; \frac{1}{n}\right) : n \in N\right\}$$

Observaţie. După Felix Hausdorff, orice intersecţie numerabilă de mulţimi deschise se notează G_δ. În mod analog, orice reuniune numerabilă de mulţimi închise se notează F_σ.

§ 3. SPAŢII METRICE COMPACTE

3.3.1. Noţiunea de spaţiu topologic compact, ca şi proprietăţile acestuia, se aplică, în particular, unui spaţiu metric. Totuşi, caracterul special al unui astfel de spaţiu ne va permite să adîncim mai mult, în acest caz, noţiunea de compacitate.

Fie (X, d) un spaţiu metric, E un şir de puncte din X, cu $E' \neq \emptyset$, x' un punct de acumulare al lui E. Să considerăm bulele $B\left(x'; \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

Prima bulă conţine un punct $x_1 \in E$, a doua bulă un punct $x_2 \in E$, ş.a.m.d. Obţinem şirul $\{x_n\}_{n \in N}$ care tinde către x'.

Aşadar: Dacă un şir de puncte din spaţiul metric (X, d) posedă un punct de acumulare x', acest şir conţine un subşir convergent către x'.

Din 2.8.3. rezultă, pe de altă parte, că un spaţiu metric compact (fiind numerabil compact) posedă proprietatea următoare:

Orice şir infinit de puncte al acestui spaţiu conţine un subşir convergent[1].

Vom arăta că, în cazul spaţiilor metrice, această proprietate *caracterizează* compacitatea. Justificarea acestei afirmaţii va rezulta din un număr de propoziţii intermediare, care prezintă şi un interes intrinsec.

---

[1] Pînă la P. S. Alexandrov şi P. Urîson, spaţiile topologice cu această proprietate se numeau spaţii compacte, după M. Fréchet. Noţiunea de compacitate în sensul lui Fréchet este mai largă decît noţiunea de compacitate adoptată astăzi în topologie.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru enunţarea proprietăţii următoare avem nevoie de o definiţie: Vom spune că un spaţiu metric (X, d) este *mărginit* dacă

$$\sup \{d(x, y) : x \in X,\ y \in Y\} < +\infty.$$

Cu această definiţie putem enunţa:

Teoremă. *Orice spaţiu metric (X, d) compact este mărginit.*

Să presupunem că (X, d) nu ar fi mărginit. Atunci, pentru orice număr natural n ar exista o pereche de puncte (x_n, y_n), astfel în cît

$$d(x_n, y_n) > n.$$

Şirul $\{x_n\}$ are un punct de acumulare x_0, iar şirul $\{y_n\}$ un punct de acumulare y_0. Fie ε un număr pozitiv. Există un număr natural n astfel încît să avem simultan

$$d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(y_0, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deducem

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y_n) < d(x_0, y_0) + \varepsilon,$$

de unde

$$d(x_0, y_0) > d(x_n, y_n) - \varepsilon > n - \varepsilon.$$

Cum n este arbitrar, rezultă

$$d(x_0, y_0) = +\infty,$$

ceea ce este absurd. Aşadar (X, d) este mărginit.

3.3.2. Prin definiţie, un spaţiu metric (X, d) este *total mărginit*[1], sau *precompact*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o descompunere *finită* a acestui spaţiu, în mulţimi de diametru mai mic decît ε.

Teorema I. *Orice spaţiu metric (X, d) total mărginit este mărginit.*

În adevăr există o partiţie

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

cu $\delta(A_i) \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Fie $x \in X$, altfel arbitrar. Putem presupune, fără a micşora generalitatea, că $x \in A_1$. Fie $y_i \in A_i$, $z_i \in A_i$, $i \leqq n$, $i \neq 1$.

Avem

$$d(x, z_i) \leqq d(x, y_i) + d(y_i, z_i),$$

[1] Noţiune datorită lui F. Hausdorff. Tot lui F. Hausdorff îi aparţin teoremele din acest alineat.

de unde

$$d(x, z_i) \leqq d(x, A_i) + 1, \quad i \neq 1,$$

deci

$$\sup \{d(x, z_i),\ z_i \in A_i,\ i \leqq n\} \leqq d(x, A_i) + 1,$$

deoarece dacă $z_i \in A_1$, atunci $d(x, z_i) \leqq 1$ şi inegalitatea precedentă este de la sine satisfăcută.

Să punem, respectiv,

$$r_i = \sup \{d(x, z_i),\ z_i \in A_i,\ i \leqq n\},$$
$$r = \sup \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}.$$

Fie (x_0, y_0) o pereche de puncte din X.

Din cele de mai sus rezultă că

$$d(x, x_0) < r, \quad d(x, y_0) < r,$$

de unde

$$d(x_0, y_0) < 2r,$$

deci

$$\sup \{d(x_0, y_0) : x_0 \in X,\ y_0 \in Y\} \leqslant 2r < \infty$$

şi spaţiul (X, d) este mărginit.

O b s e r v a ţ i e. Se pot da exemple de spaţii mărginite care nu sînt precompacte. De exemplu, spaţiul (X, d), în care

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y, \\ 0, & \text{dacă } x = y, \end{cases}$$

este în mod vizibil mărginit, dar nu este precompact (total mărginit).

O definiţie echivalentă a spaţiilor precompacte rezultă din

T e o r e m a II. *Un spaţiu (X, d) este precompact dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime finită F_ε, astfel încît toate punctele spaţiului să fie la o distanţă mai mică decît ε de mulţimea F_ε.*

În adevăr, dacă spaţiul considerat este precompact, există o partiţie

$$X = \bigcup_{i=1}^{k_n} A_i^n$$

a acestui spaţiu într-un număr finit k_n de mulţimi de diametru mai mic decît $\frac{1}{n}$. Punînd

$$F_n = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{k_n}^n\},$$

unde $x_i^n \in A_i^n$, $i \leqq k_n$, mulțimea F_n îndeplinește condiția cerută dacă $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Reciproc, fie F_ε o mulțime finită, astfel încît

$$d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$$

pentru orice $x \in X$. Scriind mulțimea F_ε sub forma

$$F_\varepsilon = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_\varepsilon}\},$$

avem

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B\left(x_i ; \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

deci X este total mărginit (precompact).

Corolar. *Orice spațiu metric precompact este de tip numerabil.*
În adevăr, cu notațiile din teorema precedentă, mulțimea

$$D = \bigcup_{n \in N} F_{\frac{1}{n}}$$

este numerabilă și densă în spațiul X.

3.3.3. Vom demonstra acum o importantă teoremă, care constituie o întărire a teoremei din 3.3.1 :

Teoremă: *Orice spațiu metric compact este precompact.*
Fie (X, d) un spațiu metric compact. Să presupunem că acest spațiu nu este precompact.
Atunci, *oricare* ar fi mulțimea *finită* F, există un număr $\varepsilon > 0$ și un punct $x \in X$, astfel încît

$$d(x, y) \geqq \varepsilon,$$

oricare ar fi $y \in F$.

Să luăm $F = \{p_0\}$. Există un punct $p_1 \in X$, cu proprietatea

$$d(p_1, p_0) \geqq \varepsilon.$$

Să luăm, în al doilea rînd, $F = \{p_0, p_1\}$. Există un punct $p_2 \in X$, cu proprietatea

$$d(p_2, p_0) \geqq \varepsilon, \quad d(p_2, p_1) \geqq \varepsilon.$$

Prin recurență, putem determina șirul infinit

$$p_0, p_1, p_2, \ldots$$

cu proprietatea

$$d(p_n, p_m) \geqq \varepsilon,$$

oricare ar fi n și m. Un astfel de șir nu poate conține nici un subșir convergent, deci (X, d) nu este numerabil compact. Rezultă, în virtutea teoremei I din 3.3.1., că spațiul considerat nu este compact, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Deci (X, d) este precompact.

Corolarul I. *Orice spațiu metric numerabil compact este precompact.*

În adevăr, dacă spațiul nu ar fi precompact, atunci el nu ar fi compact, în baza teoremei precedente.

Corolarul II. *Orice spațiu metric compact este de tip numerabil.*

În adevăr, un astfel de spațiu este precompact, deci de tip numerabil, în baza corolarului teoremei II din 3.3.2.

Exercițiu. Să se arate că dacă un spațiu metric este numerabil compact, atunci orice șir descendent de mulțimi închise are o intersecție nevidă.

R: Fie $\{F_p\}$ un șir descendent de mulțimi închise ale spațiului și $x_p \in F_p$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

Șirul $\{x_p\}$ conține un subșir $\{x_{k_n}\}$ convergent către x_0. Toți termenii subșirului, începînd cu x_{k_n} aparțin mulțimii F_{k_n}, deci și x_0, care este un punct de acumulare pentru acest subșir, aparține lui F_{k_n}, deoarece F_{k_n} este o mulțime închisă. Dar $F_{k_n} \subseteq F_n$, deci $x_0 \in F_n$. Cum n este arbitrar, $x_0 \in \bigcap_{n \in N} F_n$.

3.3.4. Cu ajutorul rezultatelor obținute în **3.3.3.** sîntem în măsură acum să demonstrăm reciproca teoremei I din **3.3.1**:

Teoremă. *Orice spațiu metric (X, d) numerabil compact este compact.*

În adevăr, orice spațiu metric numerabil compact este vizibil precompact, deci de tip numerabil (**3.3.2.**, corolarul teoremei II). El are atunci o bază numerabilă (**3.2.3.** teoremă). În asemenea condiții, teorema lui Lindelöf este aplicabilă: orice acoperire deschisă $\mathcal{G}$ a acestui spațiu conține o subacoperire numerabilă:

$$\mathcal{G}_0 = \{G_n\}_{n \in N}.$$

Să punem

$$\bigcup_{n \leq p} G_n = H_p, \quad \mathbf{C} H_p = F_p, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Șirul $\{F_p\}_{p \in N}$ de mulțimi închise este descendent. Dacă acest șir este finit, teorema este demonstrată. Vom arăta că ipoteza că șirul $\{F_p\}$ este infinit ne duce la o contradicție. În adevăr, în acest caz ar exista (**3.3.3.**, exercițiu) un punct x_0 comun *tuturor* mulțimilor F_p, deci străin de orice mulțime H_p, adică în definitiv de orice mulțime G_n, ceea ce contrazice ipoteza că familia $\{G_n\}_{n \in N}$ acoperă spațiul X. Așadar există un indice p pentru care $F_p = \varnothing$, de unde $H_p = X$ și teorema este demonstrată.

Observaţie foarte importantă: Din confruntarea teoremei precedente cu teorema I din **3.3.1.** şi cu teorema din **2.6.3.** rezultă că pentru un spaţiu metric noţiunile de compacitate (în sensul lui P. S. Alexandrov şi P. Urîson) şi de compacitate numerabilă (M. Fréchet) coincid.

Acest fapt este foarte util în aplicaţii.

3.3.5. În analiza clasică este bine cunoscut rezultatul următor: O funcţie reală continuă pe un compact (subînţeles: al dreptei, sau al spaţiului euclidian cu mai mult decît o dimensiune) este uniform continuă pe acest compact.

Această teoremă se poate extinde fără nici o modificare de enunţ la aplicaţiile continue ale unui spaţiu metric compact într-un spaţiu metric[1]. Înainte de a formula această extindere, avem nevoie de o definiţie:

O aplicaţie $f: (X, d) \to (X', d')$ este *uniform continuă* pe X dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ să implice $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

O funcţie *uniform continuă* pe X este continuă pe X (exerciţiu!). Pentru spaţiile compacte este adevărată şi reciproca.

Teoremă. *Orice aplicaţie* $f: (X, d) \to (X', d')$ *continuă pe spaţiul compact* (X, d) *este uniform continuă pe acest spaţiu.*

În adevăr, f este continuă în orice punct $x \in X$.

Deci există $\delta(\varepsilon, x)$ astfel încît $d(x, z) < \delta(\varepsilon, x)$ să implice $d'(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Familia $\{B\left(x; \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x)\right) : x \in X\}$ este o acoperire deschisă a spaţiului compact X. Ea conţine deci o subacoperire finită

$$B\left(x_1; \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_1)\right), \; B\left(x_2; \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_2)\right), \ldots, B\left(x_n; \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_n)\right).$$

Să punem

$$\delta(\varepsilon) = \inf \frac{1}{2}\{\delta(\varepsilon, x_1), \; \delta(\varepsilon, x_2), \ldots, \delta(\varepsilon, x_n)\}$$

şi să considerăm două puncte x, y astfel încît $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$. Cum

$$x \in X = \bigcup_{k \leqq n} B\left(x_k; \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_k)\right),$$

rezultă că există $i \leqq n$, astfel încît

$$x \in B\left(x_i; \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, x_i)\right) \subseteq B(x_i; \delta(\varepsilon, x_i)).$$

[1] Posibilitatea unei astfel de extensiuni nu poate mira pe cititorul care îşi aminteşte că una din demonstraţiile teoremei citate utilizează *tocmai* proprietatea exprimată de teorema de acoperire a lui Borel-Lebesgue, care a fost luată, după cum am văzut, de către P. S. Alexandrov şi P. Urîson drept definiţie a *compacităţii*.

Dar, după felul cum a fost ales $\delta(\varepsilon)$ rezultă atunci că

$$y \in B(x_i\,;\,\delta(\varepsilon,\,x_i)).$$

În asemenea condiții putem scrie

$$d'(f(y),\,f(x)) \leqq d'(f(y),\,f(x_i)) + d(f(x),\,f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

§ 4. SPAȚII METRICE COMPLETE

3.4.1. Fie $(X,\,d)$ un spațiu metric. Un șir $\{x_n\}_{n\in N}$ de puncte ale acestui spațiu este, prin definiție, un *șir fundamental* (sau încă: un *șir Cauchy*) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încît să avem implicația

$$(m > n_\varepsilon,\; n > n_\varepsilon) \Rightarrow d(x_m,\,x_n) < \varepsilon.$$

Exemplu. Orice șir $\{x_n\}_{n\in N}$ convergent către un punct $x \in X$ este fundamental. Aceasta rezultă imediat din inegalitatea

$$d(x_m,\;x_n) \leqq d(x,\;x_n) + d(x,\;x_m).$$

Totuși, nu orice șir fundamental este convergent. Să considerăm exemplul următor, cunoscut din analiza clasică: $X = Q$, $d(r',\,r'') = |r' - r''|$, unde $r' \in Q$, $r'' \in Q$. În acest spațiu metric, după cum se știe, nu orice șir fundamental este convergent.

3.4.2. Exemplul precedent ne conduce în mod natural la studierea acelor spații metrice în care orice șir fundamental de puncte este convergent.

Vom numi spațiu metric *complet* un spațiu metric $(X,\,d)$ în care orice șir fundamental este convergent.

Exerciții: 1° Să se arate că spațiul euclidean $\mathbf{R}^q$ este complet.

2° Să se arate că spațiul $\mathcal{C}(K\,;\,\mathbf{R})$ este complet.

3° Să se arate că spațiul $\mathfrak{M}(K\,;\,\mathbf{R})$ al funcțiilor *mărginite* pe mulțimea K, cu distanța $d(x,\,y) = \sup\limits_{t\in K} |x(t) - y(t)|$ este complet.

R: Dacă $t \in K$, atunci șirul *numeric* $x_n(t)$ este fundamental, deci *converge*, pentru orice t, către o funcție $x(t)$ mărginită.

Teorema I. *Orice spațiu metric compact* (X, d) *este complet.*

În adevăr, (X, d) este numerabil compact. Deci orice șir $\{x_n\}$ conține un subșir $\{x_{k_n}\}_{n\in N}$, convergent către un anumit punct $x_0 \in X$. Să presupunem șirul inițial fundamental. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, există un număr natural n_ε, astfel încît să avem simultan

$$d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad d(x_{k_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dacă $m > n_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$. Pe de altă parte,

$$d(x_n, x_0) \leqq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_0),$$

de unde, pentru $n > n_\varepsilon$, deci a fortiori $k_n > n_\varepsilon$,

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

și șirul fundamental $\{x_n\}_{n\in N}$ converge către x_0.

Teorema II. *Un spațiu metric* (X, d) *este complet dacă și numai dacă orice șir descendent* $\{F_n\}_{n\in N}$ *de mulțimi închise nevide, de diametru tinzînd către zero, are un punct comun.*

Este evident, în baza teoremei I din 2.6.2., că dacă condiția din enunț este îndeplinită[1] spațiul (X, d) este compact, deci este complet, în baza teoremei precedente. Să presupunem deci că spațiul (X, d) este complet și să considerăm un șir descendent $\{F_n\}_{n\in N}$ de mulțimi închise nevide, cu

$$\lim \delta(F_n) = 0.$$

Vom arăta că $\bigcap_{n\in N} F_n \supset \emptyset$.

Să considerăm șirul de puncte $\{x_n\}_{n\in N}$, unde $x_n \in F_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Pentru $m > n$ vom avea $x_m \in F_n$, deci

$$d(x_n, x_m) \leqq \delta(F_n). \tag{1}$$

Fie $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar. Prin ipoteză există un număr natural n_ε astfel încît $n > n_\varepsilon$ să implice

$$\delta(F_n) < \varepsilon,$$

de unde, cu atît mai mult,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad (n > n_\varepsilon, \ m > n_\varepsilon),$$

[1] Pentru această parte a demonstrației *nu* este nevoie ca diametrele mulțimilor F_n să tindă către zero.

deci şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ este fundamental. Spaţiul (X, d) fiind complet, acest şir converge către un punct $x_0 \in X$. Vom arăta că $x_0 \in \bigcap_{n\in N} F_n$. În adevăr, funcţia $d(x_n, x_m)$ fiind continuă în raport cu fiecare din argumentele sale, din (1) deducem, pentru $m \to \infty$,

$$d(x_n, x_0) \leqq \delta(F_n),$$

deci $x_0 \in \overline{F_n} = F_n$. Cum n este arbitrar, vom avea $x_0 \in \bigcap_{n\in N} F_n$ şi teorema este demonstrată.

Cititorul va verifica singur că $\bigcap_{n\in N} F_n$ conţine *un singur punct.*

Teorema III. (R. Baire). *Orice spaţiu metric complet este o mulţime de categoria a II-a.*

Fie (X, d) spaţiul metric considerat, pe care îl vom presupune *slab* (de categoria I). Aceasta înseamnă că

$$X = \bigcup_{n\in N} E_n,$$

unde E_n, $n = 1, 2, \ldots$ sînt mulţimi rare.

Fie $B_0 = B(x_0; r_0)$ o bulă a spaţiului (X, d). Există o bulă $B_1 = B(x_1; r_1) \subset B_0$, *disjunctă* de E_1. Vom alege această bulă, micşorînd convenabil pe r_1, astfel încît să avem simultan $r_1 < \frac{r_0}{2}$, $\overline{B_1} \subset B_0$.

Cu B_1 vom proceda la fel: există o bulă $B_2 = B(x_1; r_2) \subset B_1$, disjunctă de E_2 (deci de $E_1 \cup E_2$). Vom alege pe r_2 astfel încît să avem simultan $r_2 < \frac{r_1}{2} < \frac{r_0}{2^2}$, $\overline{B_2} \subset B_1$.

Prin recurenţă, obţinem şirul *descendent* de mulţimi închise $\{\overline{B_n}\}$ cu proprietatea

$$\delta(\overline{B_n}) < \frac{r_0}{2^{n-1}},$$

deci

$$\lim \delta(\overline{B_n}) = 0.$$

În baza teoremei precedente, există un punct $x_0 \in X$ comun tuturor acestor mulţimi, deci neaparţinînd nici uneia din mulţimile E_n. Rezultă că $x_0 \notin X$. Contradicţia obţinută demonstrează teorema.

Scanned with OKEN Scanner

3.4.3. Am văzut mai sus că orice spațiu compact este precompact. Este reciproca acestei propoziții adevărată? Răspunsul este afirmativ, cu o condiție suplimentară:

Teoremă. (F. Hausdorff). *Orice spațiu precompact și complet este compact.*

Fie, în adevăr, (X, d) un spațiu metric, precompact, și complet. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, există o mulțime finită $F_{\varepsilon/2}$, astfel încît pentru orice punct $x \in X$, să avem

$$d(x, F_{\varepsilon/2}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

În particular, dacă $\{x_n\}_{n \in N}$ este un șir arbitrar al spațiului, vom avea

$$d(x_n, F_{\varepsilon/2}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Cum $F_{\varepsilon/2}$ este *finită*, există cel puțin un punct $a \in F_{\varepsilon/2}$ care corespunde, în inegalitatea precedentă, la o infinitate de valori ale indicelui n. Altfel spus, există un punct $a \in F_{\varepsilon/2}$ și un subșir $\{x_{k_n}\}_{n \in N}$ al șirului considerat, astfel încît să avem

$$d(x_{k_n}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

oricare ar fi n, de unde

$$d(x_{k_n}, x_{k_m}) < \varepsilon$$

oricare ar fi m și n[1].

Să luăm $\varepsilon = 1$. Acestui număr îi corespunde șirul

$$x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots$$

extras din șirul dat $\{x_n\}_{n \in N}$, astfel încît distanța dintre două puncte oarecare ale acestuia este mai mică decît 1. Șirul precedent conține subșirul

$$x_1^1, x_2^2, x_2^3, \ldots,$$

astfel încît distanța dintre două puncte oarecare ale acestuia (începînd de la al doilea) este mai mică decît $\frac{1}{2}$. Șirul precedent conține, la rîndul său, subșirul

$$x_1^1, x_2^2, x_3^3, x_3^4, \ldots,$$

astfel încît distanța dintre două puncte oarecare ale acestuia (începînd de la al treilea) este mai mică decît $\frac{1}{3}$; ș.a.m.d.

[1] Aceasta nu înseamnă că șirul $\{x_{k_n}\}$ este fundamental, căci el depinde de ε.

Scanned with OKEN Scanner

Obținem, prin recurență, șirul dublu de puncte

$$x_1^1,\ x_1^2,\ x_1^3,\ x_1^4,\ \ldots$$
$$x_1^1,\ x_2^2,\ x_2^3,\ x_2^4,\ \ldots$$
$$x_1^1,\ x_2^2,\ x_3^3,\ x_3^4,\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^1,\ x_2^2,\ x_3^3,\ x_4^4,\ \ldots,\ x_n^n,\ x_n^{n+1},\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

cu proprietățile următoare:

1) fiecare șir este extras din precedentul;

2) distanța dintre două puncte oarecare ale șirului de rang n, începînd de la al $(n+1)$-lea punct, este mai mică decît $\frac{1}{n}$;

3) șirul *diagonal*

$$x_1^1,\ x_2^2,\ x_3^3,\ \ldots,\ x_n^n,\ \ldots$$

este un subșir al oricăreia din liniile tabloului precedent, deci un subșir al șirului inițial $\{x_n\}_{n\in N}$.

Fie, acum, $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar. Fie, de asemenea, n_0 cel mai mic natural astfel încît $n_0 > \frac{1}{3}$. Pentru $m > n_0$, $n > n_0$ vom avea

$$d(x_m^m,\ x_n^n) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

deci șirul $\{x_n^n\}_{n\in N}$ este fundamental. Cum $(X,\ d)$ este complet, acest șir este convergent, deci $(X,\ d)$ este compact.

3.4.4. Fie $(X,\ d)$ un spațiu metric complet. Vom spune că o aplicație: $f: X \to X$ este o *contracție* dacă există un număr pozitiv $\alpha < 1$ astfel încît

$$d(f(x'),\ f(x'')) \leqq \alpha d(x',\ x''),$$

pentru orice pereche $(x',\ x'')$ de puncte din X.

Este vizibil că orice contracție este o funcție continuă, și chiar uniform continuă în spațiul X. În adevăr, $\varepsilon > 0$ fiind dat, este suficient să luăm

$$d(x',\ x'') < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

pentru ca să avem

$$d(f(x'),\ f(x'')) < \varepsilon.$$

Scanned with OKEN Scanner

Principiul contracției (Banach). *Dacă f este o contracție a spațiului metric complet (X, d), există un punct $x_0 \in X$ și unul singur astfel încît*

$$f(x_0) = x_0.$$

Observație preliminară. Un punct x_0 pentru care $f(x_0) = x_0$ se cheamă un *punct fix* al aplicației f. Cu această definiție, teorema precedentă se enunță astfel:

Orice contracție a unui spațiu metric complet are un punct fix și unul singur.

Pentru demonstrarea teoremei, vom considera un punct $x_1 \in X$, altfel arbitrar și vom defini șirul $\{x_n\}_{n \in N}$ în mod recurent astfel:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Să punem $d(x_1, x_2) = k$. Vom avea, succesiv,

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1)f(x_2)) \leqq \alpha k$$
$$d(x_3, x_4) = d(f(x_2), f(x_3)) \leqq \alpha^2 \cdot k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leqq \alpha^n \cdot k,$$

de unde

$$d(x_{n+1}, x_{n+p}) \leqq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqq$$
$$\leqq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-2})\, k < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot k.$$

Cum $\alpha^n \to 0$ pentru $n \to \infty$, rezultă că șirul $\{x_n\}_{n \in N}$ este fundamental, deci are o limită x_0. Din inegalitatea precedentă deducem, pentru $p \to \infty$,

$$d(x_{n+1}, x_0) \leqq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} k$$

sau

$$d(f(x_n), x_0) \leqq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} k,$$

deci $f(x_n)$ tinde către x_0 (pentru $n \to \infty$). Dar $f(x_n)$ tinde către $f(x_0)$, deoarece x_n tinde către x_0. Deci $f(x_0) = x_0$ și x_0 este un punct fix al contracției.

Să presupunem că ar mai exista un punct $x_0' \neq x_0$, astfel încît

$$f(x_0') = x_0'.$$

Am deduce

$$d(f(x_0), f(x_0')) \leqq \alpha d(x_0, x_0'),$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$d(x_0, x_0') \leqq \alpha d(x_0, x_0'),$$

de unde, $d(x_0, x_0')$ fiind diferit de zero, $\alpha \geqq 1$, ceea ce este absurd[1].

Observație importantă. Teorema de mai sus nu este altceva decît o axiomatizare a procesului de aproximații succesive, utilizat în demonstrarea diverselor teoreme de existență. Acest lucru va apărea în mod clar din aplicațiile pe care le dăm mai jos ca exerciții.

Exerciții: 1° Fie f o funcție continuă în banda $x_0 - a < x < x_0 + a$ a planului și verificînd pentru orice pereche de puncte (x, y'), (x, y'') ale acestei benzi condiția

$$|f(x, y'') - f(x, y')| \leqq K|y'' - y'|,$$

unde K este o constantă. Să se arate că există o funcție φ, definită pe un anumit interval $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (x_0 - a, x_0 + a)$, derivabilă în acest interval, și una singură, astfel încît să avem

$$\varphi(x_0) = y_0, \frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x)),$$

unde y_0 este un număr real dat.

R: Condițiile date se pot scrie într-o formă unică

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Să punem $\delta = \min\left(\frac{1}{K}, a\right)$. Spațiul $\mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta]; R)$ este complet. În acest spațiu, aplicația $\varphi \to F(\varphi)$, unde

$$F(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

este o contracție.

2° Se consideră ecuația integrală („ecuație de tip Fredholm")

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y), \varphi(s)\, ds,$$

unde f, K sînt funcții continue, prima pe segmentul $[a, b]$, a doua pe pătratul închis $[a, b] \times [a, b]$.

---

[1] Să observăm că *unicitatea* punctului fix a putut fi stabilită independent de existența sa. Acest lucru se datorește faptului, valabil în toate problemele de acest fel, că o teoremă de unicitate *nu afirmă existența unui element, ci imposibilitatea existenței a mai mult decît un element.*

Scanned with OKEN Scanner

Fie M marginea superioară a funcției $|K|$ pe pătratul considerat. Să se arate că dacă $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, ecuația precedentă are o soluție și una singură.

R: În spațiul complet $\mathcal{C}([a, b]; R)$, aplicația $\varphi \to U(\varphi)$, unde

$$U(\varphi) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds$$

este o contracție.

3.4.5. Proprietățile de mai sus au pus în evidență importanța noțiunii de spațiu metric complet.

În asemenea condiții, se pune întrebarea dacă un spațiu metric oarecare poate fi prelungit într-un spațiu metric complet. Răspunsul este (cu o anumită convenție de identificare) afirmativ; el cere unele pregătiri.

Fie (X, d), (X', d') două spații metrice.
Dacă există o bijecție

$$f: X \to X'$$

astfel încît

$$d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

pentru orice pereche de puncte (x_1, x_2) ale spațiului (X, d), vom spune că f este o *izometrie* între cele două spații.

O izometrie constituie în mod vizibil un homeomorfism între cele două spații. Ea transformă topologia spațiului X în topologia spațiului X'. Mai mult decît atît, ea transformă bulele spațiului X în bule ale spațiului X'.

Cu aceste pregătiri putem enunța următoarea teoremă:

Teorema I. (F. Hausdorff): *Orice spațiu metric* (X, d) *este izometric cu un subspațiu* $(Y, \hat{d})$ *al unui spațiu metric complet* $(\hat{X}, \hat{d})$, *în care* Y *este dens.*

Să notăm cu $\mathfrak{X}$ familia tuturor șirurilor fundamentale ale spațiului (X, d). Între elementele acestei familii vom stabili o relație de echivalență „$\sim$" în felul următor: Dacă $\{x_n\}_{n\in N} \in \mathfrak{X}$, $\{y_n\}_{n\in N} \in \mathfrak{X}$ atunci

$$\{x_n\}_{n\in N} \sim \{y_n\}_{n\in N}$$

dacă și numai dacă

$$\lim d(x_n, y_n) = 0.$$

(Cititorul va verifica singur că relația astfel stabilită este o relație de echivalență.) Să notăm cu $\hat{X}$ mulțimea claselor de echivalență determinate de această relație.

Fie $\hat{x} \in \hat{X}$, $\hat{y} \in \hat{X}$, $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{y_n\} \in \hat{y}$.

Vom arăta că $\lim d(x_n, y_n)$ există și este finită.

În adevăr,

$$d(x_n, y_n) \leqq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

$$d(x_m, y_m) \leqq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m),$$

de unde

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leqq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Deci șirul $\{d(x_n, y_n)\}$ este fundamental. Cum este un șir numeric, el are o limită (finită).

Cititorul va verifica singur, ca exercițiu, că această limită *nu* depinde de elementele respective $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, luate în clasele $\hat{x}$, $\hat{y}$. Este deci firesc să notăm această limită astfel: $\hat{\hat{d}}(\hat{x}, \hat{y})$.

Așadar,

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = \hat{\hat{d}}(\hat{x}, \hat{y}). \tag{1}$$

Vom verifica că $\hat{d}$ este o distanță în mulțimea $\hat{X}$. Fie, în adevăr, $\hat{x} \in \hat{X}$, $\hat{y} \in \hat{X}$, $\hat{z} \in \hat{X}$, $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{y_n\} \in \hat{y}$, $\{z_n\} \in \hat{z}$.

Dacă $\hat{\hat{d}}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, atunci din (1) rezultă că $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, deci $\hat{x} = \hat{y}$.

În al doilea rînd este evident că $\hat{\hat{d}}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\hat{d}}(\hat{y}, \hat{x})$.

În al treilea rînd, din inegalitatea evidentă

$$d(x_n, z_n) \leqq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

deducem, trecînd la limită,

$$\hat{\hat{d}}(\hat{x}, \hat{z}) \leqq \hat{\hat{d}}(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{\hat{d}}(\hat{y}, \hat{z}).$$

Vom defini acum o aplicație $f: X \to \hat{X}$ care face să corespundă unui punct $x \in X$ clasa de echivalență a șirurilor fundamentale care tind către x[1]. Este vizibil că f este o izometrie între X și $f(X)$.

[1] Un reprezentant al acestei clase este șirul $\{x_n\}$ în care $x_n = x$ pentru orice n.

Fie $Y = f(X)$. Vom arăta că $\overline{Y} = \hat{X}$.

Fie $\hat{x} \in \hat{X}$, şi $\varepsilon > 0$, altfel arbitrare. Dacă $\{x_n\}_{n \in N} \in \hat{x}$, există n_ε astfel încît $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$ să implice $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Să notăm cu $\hat{x}_\varepsilon$ clasa de echivalenţă căreia îi aparţine şirul staţionar

$$\{x_{n_\varepsilon+1}, \; x_{n_\varepsilon+1} \ldots\},$$

Vom avea, pe de o parte $\hat{x}_\varepsilon \in \hat{X}$, iar pe de altă parte

$$d(x_n, \; x_{n_\varepsilon+1}) < \varepsilon,$$

de unde

$$\lim_{n \to \infty} d \; (x_n, \; x_{n_\varepsilon+1}) \leqq \varepsilon,$$

adică

$$\hat{d}(\hat{x}, \; \hat{x}_\varepsilon) \leqq \varepsilon.$$

Cum $\hat{x}_\varepsilon = f(x_{n_\varepsilon+1})$, rezultă că orice punct din $\hat{X}$ este punct de acumulare pentru Y, adică $\overline{Y} = \hat{X}$.

Rămîne să arătăm că $\hat{X}$ este complet.

Fie $\{\hat{x}^p\}_{p \in N}$ un şir fundamental de puncte din $\hat{X}$ şi $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar.

Fie, de asemenea, $\{x_n^p\} \in \hat{x}^p$. Vom suprima din $\{x_n^p\}$ un număr finit de termeni, astfel încît să avem $d(x_n^p, \; x_m^p) < \frac{1}{p}$, *oricare* ar fi m şi n.

Să alegem numărul natural n_ε astfel încît $p > n_\varepsilon$, $q > n_\varepsilon$ să implice

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n^p, \; x_n^p) = \hat{d}(\hat{x}^p, \; \hat{x}^q) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vom putea presupune $n_\varepsilon > \frac{3}{\varepsilon}$. Atunci, pentru $p > n_\varepsilon$, $q > n_\varepsilon$ şi n destul de mare, vom avea

$$d(x_n^p, \; x_n^q) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Deducem, pentru $p > n_\varepsilon$, $q > n_\varepsilon$,

$$d(x_p^p, \; x_q^q) \leqq d(x_p^p, \; x_n^p) + d(x_n, \; x_n^q) + d(x_n^q, \; x_q^q) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, șirul $\{x_p\}_{p\in N}$ este fundamental: el va determina o clasă de echivalență, adică un element $\hat{x}\in\hat{X}$. Vom avea, atunci,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n^p, x_n'') = d(\hat{x}^p, \hat{x}) \leqq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

ceea ce echivalează cu

$$\lim_{p\to\infty} \hat{x}^p = \hat{x},$$

deci șirul fundamental $\{\hat{x}^p\}_{p\in N}$ este convergent și spațiul $\hat{X}$ este complet.

Observație. 1° Dacă facem convenția să identificăm spațiul (X, d) cu $(Y, \hat{d})$ cu care este izometric (convenție justificată de faptul că relația de izometrie este o relație de echivalență), teorema precedentă se poate formula mai simplu astfel:

Orice spațiu metric se poate prelungi până la un spațiu metric complet, în care este dens.

2° Dacă $X = \mathbf{Q}$, cu $d = |r' - r''|$, $r'\in\mathbf{Q}$, $r''\in\mathbf{Q}$, atunci $\hat{X} = \mathbf{R}$, adică mulțimea numerelor reale.

Teorema precedentă ne furnizează așadar și o teoremă de existență a numerelor iraționale, precum și proprietatea $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

3° Spațiul $(\hat{X}, \hat{d})$ obținut prin raționamentul de mai sus se numește *completatul* spațiului (X, d).

Teorema II. (F. Hausdorff). *Completatul $(\hat{X}, \hat{d})$ al unui spațiu metric (X, d) este unic determinat, în afară de o izometrie.*

Fie, în adevăr, $(\hat{X}, \hat{d})$ și $(\check{X}, \check{d})$ două spații metrice complete, care conțin spațiul (X, d) ca o mulțime densă. Vom arăta că se poate stabili o izometrie între aceste două spații.

Pentru fiecare $\hat{x}\in\hat{X}$ există un șir $\{x_n\}$ de elemente din X, care converge către $\hat{x}$. Dar șirul $\{x_n\}$ poate fi considerat, în $\check{X}$, ca un șir fundamental. Cum $\check{X}$ este complet, acest șir tinde către un punct $\check{x}\in\check{X}$. Corespondența $f: \hat{x} \to \check{x}$ definită în acest mod este o izometrie.

În adevăr, dacă

$$\lim x_n = \hat{x} \qquad (\text{în } \hat{X})$$

și

$$\lim x_n = \check{x} \qquad (\text{în } \check{X}),$$

apoi

$$\lim y_n = \hat{y} \qquad (\text{în } \hat{X})$$

şi

$$\lim y_n = \check{y} \qquad (\text{în } \check{X}),$$

avem, respectiv,

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

$$\check{d}(\check{x}, \check{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n y_n),$$

adică

$$\check{d}(\check{x}, \check{y}) = \check{d}(f(\hat{x}), f(\hat{y}) = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}).$$

Exerciţii: 1° Dacă (X, d) este de tip numerabil, $(\hat{X}, \hat{d})$ este de tip numerabil.

2° Dacă (X, d) este precompact, $(\hat{X}, \hat{d})$ este compact.

3° Dacă închiderea oricărei bule într-un spaţiu metric (X, d) este compactă, atunci (X, d) este complet şi de tip numerabil.

R. Fie $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir fundamental de puncte din (X, d). Pentru n şi p oarecare şi pentru orice punct $x_0 \in X$ avem

$$d(x_0, x_{n+p}) \leqq d(x_0, x_n) + d(x_n, x_{n+p}).$$

Putem alege pe n_0 astfel încît să avem $d(x_{n_0}, x_m) \leqslant 1$, unde am pus $n_0 + p = m$. Deducem

$$d(x_0, x_m) \leqq d(x_0, x_{n_0}) + 1.$$

Deci există o bulă $B(x_0; r) \supseteq \{x_n\}_{n\in N}$, de unde cu atît mai mult $Y = \overline{B(x_0; r)} \supseteq \supseteq \{x_n\}_{n\in N}$.

Cum Y este un spaţiu compact, rezultă că Y este compact prin şiruri. Dar şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ fiind fundamental, înseamnă că acest şir are o limită $x_0 \in Y$. Deci (X, d) este *complet*.

Să punem $Y_n = \overline{B(x_0; n)}$, unde $n \in N$.
Y_n este separabil, deci există o mulţime numerabilă $D_n \subseteq Y_n$, astfel încît $\overline{D}_n = Y_n$. Să punem $D = \bigcup_{n\in N} D_n$. Avem

$$X \supseteq \overline{D} = \overline{\bigcup_{n\in N} D_n} \supseteq \bigcup_{n\in N} \overline{D}_n = \bigcup_{n\in N} Y_n = X,$$

deci mulţimea numerabilă D este densă în X şi X este de tip numerabil.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

SPAȚII VECTORIALE NORMATE

§ 1. DEFINIȚII. EXEMPLE

4.1.1. Se numește spațiu vectorial (sau linear), pe un corp comutativ K cu element unitate e, un grup abelian X, în care vom nota, ca de obicei, cu „+" (plus) legea de compunere a elementelor, și în care este definită o aplicație a produsului cartezian $K \times X$ în X, notată pe scurt αx, cu $\alpha \in K$, $x \in X$, cu următoarele proprietăți:

1) pentru orice pereche $\alpha \in K$, $\beta \in K$ și pentru orice element $x \in X$ avem[1]

$$\alpha(\beta x) = \alpha\beta x,$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$ex = x.$$

2) pentru orice element $\alpha \in K$ și pentru orice pereche $x \in X$, $y \in X$ avem

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Vom numi, în general, *punct* orice element al unui spațiu vectorial. Totuși, avînd în vedere că vectorii (liberi) din R^3 verifică toate condițiile de mai sus, va fi uneori avantajos să interpretăm elementele spațiului X ca *vectori* (în loc de puncte).

De obicei, K este corpul R al numerelor reale sau corpul C al numerelor complexe.

În primul caz, spațiul X este, prin definiție, *un spațiu vectorial real*, în al doilea caz, un *spațiu vectorial complex*.

---

[1] Scriem, pentru simplitate, $\alpha\beta x$ în loc de $(\alpha\beta)x$.

4.1.2. Un spațiu vectorial X este, prin definiție, *normat* dacă există o aplicație $X \to R$, notată $\|*\|$[1] și numită *norma* elementului x, cu proprietățile următoare:

1) $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0_X$, unde O_X este elementul neutru al grupului abelian X („Originea" spațiului X).

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

3) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ pentru orice pereche de puncte x, y ale spațiului X.

Un spațiu vectorial normat poate fi *metrizat*, punînd, pentru orice pereche x, y de puncte din X,

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un spațiu vectorial normat care, ca spațiu metric, cu metrica de mai sus, este complet, se numește pe scurt un *spațiu al lui Banach*.

4.1.3. Fie $Y \subset X$, cu proprietățile următoare:

1° $x \in Y$, $y \in Y \Rightarrow x + y \in Y$;

2° $x \in Y$, $\alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in Y$.

O astfel de submulțime se cheamă o *varietate linerară* în X.

Dacă Y este, în plus, o mulțime închisă, atunci Y este un *subspațiu* al lui X.

Teoremă. *Dacă $X_0 \subset X$, intersecția Y a tuturor varietăților lineare care conțin pe X_0 este mulțimea tuturor vectorilor de forma*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, \tag{1}$$

unde n este un număr natural oarecare, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectori arbitrari în X_0, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ aparțin corpului K.[2]

În adevăr, fie X' o varietate lineară care conține pe X_0. Vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aparțin lui X_0, deci lui X'. Deci și vectorul (1) aparține lui X'.

Cum X' este arbitrar, rezultă că vectorii de forma (1) aparțin *tuturor* varietăților lineare care conțin pe X_0, deci și intersecția lor Y.

Observații: Y se cheamă varietatea lineară *generată* de mulțimea X_0.

Închiderea lui Y se cheamă *subspațiul* lui X generat de mulțimea X_0.

---

[1] sau chiar $|*|$.

[2] În viitor vom numi *scalar* orice element al corpului K.

Exerciţii: 1° Să se arate că $Ox = O_X$.

R: Se vor aplica axiomele 1) şi 2).

2° Spaţiul $\mathbf{R}^q$ devine un spaţiu al lui Banach dacă se pune

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{q} x_k^2}$$

3° Spaţiul $\mathcal{C}(K; R)$ devine un spaţiu al lui Banach dacă se pune, pentru orice $x \in \mathcal{C}(K; R)$,

$$\|x\| = \sup_{t \in K} \|x(t)\|.$$

4° O mulţime a unui spaţiu vectorial se numeşte *convexă* dacă această mulţime conţine o dată cu perechea de puncte x, y, orice punct $z = tx + (1 - t)y$, unde $t \in (0,1)$.

Să se arate că orice bulă a unui spaţiu al lui Banach este o mulţime convexă.

5° Fie $\{x_n\}_{n \in N}$ un şir de puncte ale unui spaţiu al lui Banach. Dacă seria $\sum_1^\infty \|x_n\|$ este convergentă, atunci seria $\sum_1^\infty x_n$ este convergentă.

§ 2. APLICAŢII LINEARE

4.2.1. Fie X, Y două spaţii vectoriale normate, reale sau complexe. O aplicaţie, $f: X \to Y$ este *omogenă* dacă pentru orice $\alpha \in R$ (respectiv $\alpha \in C$) şi orice vector $x \in X$ avem

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Aplicaţia f este, prin definiţie, *aditivă* dacă pentru orice pereche x, y de elemente din X avem

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

O aplicaţie omogenă şi aditivă se cheamă, pe scurt, o *aplicaţie liniară*.

O aplicaţie liniară a unui spaţiu în el însuşi se cheamă deseori un *operator* linear (sau simplu: operator). Se obişnuieşte, de asemenea, să se numească *funcţională liniară* orice aplicaţie liniară a unui spaţiu vectorial normat X în dreapta numerică R.

Teoremă. *O aplicaţie $f: X \to Y$ liniară, continuă într-un punct $x_0 \in X$, este continuă în tot spaţiul X.*

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x \neq x_0$, altfel arbitrar. Vom stabili o izometrie $y \to g(y)$ a spaţiului X în el, însuşi punînd

$$z = g(y) = y + x - x_0.$$

Bula $B(x_0\,;\,\delta)$ se transformă, prin această izometrie, în bula $B(x\,;\,\delta)$ şi reciproc. Deci, dacă $\varepsilon > 0$ fiind dat există δ astfel încît $y \in B(x_0\,;\,\delta)$ să implice $f(y) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, vom avea, din cauza linearităţii lui f,

$$f(z) - f(x) = f(y) - f(x_0).$$

Dar $y \in B(x_0,\ \delta) \Leftrightarrow z \in B(x\,;\,\delta)$, deci $z \in B(x\,;\,\delta)$ implică $f(z) \in B(f(x), \varepsilon)$ şi f este continuă în punctul x.

4.2.2. Fie f o aplicaţie lineară a spaţiului vectorial normat X în spaţiul vectorial normat Y. Dacă există $M > 0$ astfel încît

$$\|f(x)\| \leqq M.\|x\|,$$

oricare ar fi $x \in X$, vom spune că aplicaţia f este *mărginită*. Prin definiţie[1],

$$\|f\| = \inf \{M : \|f(x)\| \leqq M.\|x\|\}.$$

Aplicaţia $f \to \|f\|$ se numeşte *norma* lui f.
Pentru orice aplicaţie lineară şi mărginită putem aşadar scrie

$$\|f(x)\| \leqq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Teorema I. *O aplicaţie lineară $f : X \to Y$ este continuă dacă şi numai dacă este mărginită.*

Să presupunem aplicaţia f mărginită şi să considerăm două puncte $x' \in X$, $x'' \in X$. Vom avea

$$\|f(x'') - f(x')\| = \|f(x'' - x')\| \leqq \|f\| \cdot \|x'' - x'\|,$$

de unde rezultă continuitatea (şi chiar continuitatea uniformă) a lui f.

Dacă f *nu* este mărginită, atunci pentru orice număr natural n există un punct $x_n \in X$, pentru care

$$\|f(x_n)\| > n\|x_n\|.$$

Să punem $z_n = \frac{1}{n \cdot \|x_n\|} \cdot x_n$. Avem, pe de o parte, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0_X$, iar, de pe altă parte, oricare ar fi n,

$$\|f(z_n)\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|f(x_n)\| > 1,$$

deci f este discontinuă în origine, adică în tot spaţiul X (**4.2.1.**).

[1] Notaţia $\|f\|$ constituie o *anticipaţie*, care va fi justificată (teorema III).

Teorema II. *Pentru orice aplicație $f: X \to Y$ liniară și mărginită avem*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\leqq 1} \|f(x)\|.$$

În adevăr, din inegalitatea

$$\|f(x)\| \leqq \|f\| \cdot \|x\|$$

deducem, dacă $\|x\| \leqq 1$,

$$\|f(x)\| \leqq \|f\|,$$

deci

$$\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \leqq \sup_{\|x\|\leqq 1} \|f(x)\| \leqq \|f\|. \tag{1}$$

Pe de altă parte, din însăși definiția lui f rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ dat există un punct $x_\varepsilon \in X$ astfel încît să avem

$$\|f(x_\varepsilon)\| > (\|f\| - \varepsilon) \cdot \|x_\varepsilon\|.$$

Să punem

$$x = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|} \cdot x_\varepsilon.$$

Avem $\|x\| = 1$. Apoi

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\|x_\varepsilon\|} \cdot \|f(x_\varepsilon)\| > \|f\| - \varepsilon,$$

de unde, cu atît mai mult

$$\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \geqq \|f\| - \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, deducem

$$\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| \geqq \|f\|.$$

Confruntînd cu inegalitățile (1), deducem egalitățile cerute.

Teorema III: *Mulțimea aplicațiilor lineare și mărginite ale unui spațiu vectorial normat X într-un spațiu vectorial normat Y poate fi organizată într-un spațiu vectorial normat, care este un spațiu al lui Banach dacă Y este un spațiu al lui Banach.*

Fie $\mathfrak{L}$ această mulțime. Dacă $f \in \mathfrak{L}$, $g \in \mathfrak{L}$, vom defini pe $f + g$ ca aplicația $x \to f(x) + g(x)$.

Dacă $f \in \mathfrak{L}$ și α este un scalar, vom defini pe αf ca aplicația $x \to f(x)$. Această aplicație este liniară. Deci $\mathfrak{L}$ este un spațiu vectorial.

Scanned with OKEN Scanner

În acest spaţiu vectorial vom defini norma unui element f prin teorema precedentă:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|f(x)\|.$$

Să arătăm că aplicaţia $f \to \|f\|$ verifică axiomele normei.

Să presupunem $\|f\| = 0$. Aceasta înseamnă că $f(x) = O_X$ în bula unitate B_0 centrată în O_X. Fie $x \notin B_0$. Putem alege scalarul α astfel încît să avem $\alpha x \in B_0$ $\left(\text{este suficient să luăm } |\alpha| \leqq \frac{1}{\|x\|}\right)$.

Atunci $f(\alpha x) = O_X = \alpha f(x)$, de unde $f(x) = O_X$, deci $f = O_{\mathfrak{L}}$.

În al doilea rînd, dacă α este un scalar, avem

$$\|\alpha f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|\alpha f(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\| \leqq 1} \|f(x)\| = |\alpha| \cdot \|f\|.$$

În al treilea rînd, dacă $f \in \mathfrak{L}$, $g \in \mathfrak{L}$, avem

$$\|f + g\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|f(x) + g(x)\| \leqq \sup_{\|x\| \leqq 1} \|f(x)\| + \sup_{\|x\| \leqq 1} \|g(x)\|.$$

Aşadar aplicaţia $f \to \|f\|$ este o normă în spaţiu vectorial $\mathfrak{L}$ şi $\mathfrak{L}$ este un spaţiu vectorial normat.

Să presupunem acum că Y este un spaţiul al lui Banach. Fie $\{f_n\}_{n \in N}$ un şir fundamental de elemente din $\mathfrak{L}$. Vom arăta, în primul rînd, că şirul de elemente $\{f_n(x)\}_{n \in N}$ *din* Y converge în fiecare punct din X. Fie, în adevăr, $x_0 \in X$ şi α un scalar astfel încît să avem $x = \alpha x_0 \in B_0$. Fie, de asemenea, $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar. Există n_0 astfel încît $n > n_0$ să implice

$$\|f_{n+p} - f_n\| < |\alpha| \varepsilon,$$

de unde, cu atît mai mult,

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| < |\alpha| \varepsilon,$$

deoarece $x \in B_0$. Ultima inegalitate se mai poate scrie

$$|\alpha| \, \|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\| < |\alpha| \varepsilon,$$

deci şirul $\{f_n(x_0)\}_{n \in N}$ este fundamental. Cum spaţiul Y este complet, acest şir are o limită $f(x_0) \in Y$.

Să arătăm că $f \in \mathfrak{L}$.

Fie α un scalar. Din

$$\lim f_n(x_0) = f(x_0)$$

deducem

$$\alpha \lim f_n(x_0) = \alpha f(x_0)$$

sau

$$\lim f_n(\alpha x_0) = \alpha f(x_0) = f(\alpha x_0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie, în al doilea rînd, $x_0 \in X$, $x_1 \in X$.

Din

$$\lim f_n(x_0) = f(x_0), \quad \lim f_n(x_1) = f(x_1)$$

deducem

$$\lim f_n(x_0) + \lim f_n(x_1) = f(x_0) + f(x_1)$$

sau

$$\lim(f_n(x_0) + f_n(x_1)) = f(x_0) + f(x_1),$$

sau încă

$$\lim f_n (x_0 + x_1) = f(x_0) + f(x_1) = f(x_0 + x_1).$$

Deci f este liniară, adică $f \in \mathfrak{L}$: cu aceasta, teorema este demonstrată.

Observație: Spațiul definit de teorema precedentă și pe care noi l-am notat pentru nevoile demonstrației $\mathfrak{L}$, se obișnuiește a se nota $\mathfrak{L}(X, Y)$ sau $\mathfrak{B}(X, Y)$ dacă Y este un spațiu al lui Banach.

Dacă $Y = X$, acest spațiu se notează, simplu, $\mathfrak{L}(X)$, respectiv $\mathfrak{B}(X)$.

Dacă $Y = R$, spațiul considerat este spațiul funcționalelor lineare mărginite, definite pe X. Acest spațiu se numește *conjugatul* sau *dualul* lui X și se notează X^*. Așadar, cu notația de mai sus $X^* = \mathfrak{B}(X, R)$, deoarece R este un spațiu al lui Banach.

Exerciții: 1° Să se arate că orice spațiu vectorial normat X poate fi prelungit (în afară de o izometrie) pînă la un spațiu X al lui Banach, în care X este dens.

2° Dacă $E \subset X$, mulțimea E' a elementelor $x^* \in X^*$ pentru care $x^*(x) = 0$ oricare ar fi $x \in E$, se numește *ortogonala* mulțimii E și se notează E^1.

Să se arate că dacă E este o varietate lineară, atunci E^1 este o varietate lineară închisă a lui X^*.

3° În spațiul $\mathfrak{C}_{[0,1]}$ să punem

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt.$$

Să se arate că f este o funcțională lineară continuă și să se calculeze $||f||$.

R: Linearitatea este vizibilă. Mai departe avem

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)|\,dt \leq \sup_{t \in [0,1]} |x(t)| = ||x||.$$

Deci f este mărginită şi $||f|| \leqq 1$. În fapt,

$$||f|| = \sup_{||x|| \leqq 1} |f(x)| = 1.$$

Notă. Istoriceşte, integrala a constituit primul exemplu de aplicaţie lineară şi continuă. *După* constituirea analizei funcţionale, atenţia multor matematicieni a fost îndreptată spre problema *inversă*: reprezentarea unei aplicaţii lineare şi continue ca o integrală, cu preţul unei extensiuni corespunzătoare a noţiunii de integrală. Acest lucru a reuşit în numeroase cazuri concrete.

4.2.3. Fie $f: X \to X$ o aplicaţie continuă a spaţiului vectorial normat X în el însuşi.

Sîntem obligaţi, în numeroase probleme importante, să considerăm compuneri repetate ale unei astfel de aplicaţii cu ea însăşi

$$f \circ f,\ f \circ (f \circ f),\ f \circ (f \circ (f \circ f)), \ldots$$

Ce sens trebuie să dăm unor astfel de expresii?
Vom căuta să dăm un răspuns acestei întrebări. Să punem

$$f(X) = X_0.$$

Este uşor de verificat (exerciţiu!) că X_0 este o varietate lineară (nu neapărat închisă) a spaţiului X. Deci, în primul rînd,

$$O_X \in X_0.$$

În al doilea rînd, dacă $x \neq O_X$ şi $x \in X_0$, atunci $\alpha x \in X_0$ oricare ar fi scalarul α, deci X_0 conţine elemente de orice normă. În particular,

$$B(0_X;\ 1) \cap X_0 \neq \emptyset.$$

Să considerăm aplicaţia $g: X_0 \to X$, lineară şi continuă. Aceasta înseamnă că dacă $x_n \to x$, atunci $g(x_n) \to g(x)$.

Raţionamentul făcut pentru demonstrarea teoremei I din **4.2.2.** se aplică fără modificare şi în cazul nostru (deoarece $O_X \in X_0$) pentru a deduce că există un număr pozitiv M astfel încît să avem pentru orice aplicaţie $g: X_0 \to X$ lineară şi continuă

$$||g(x)|| \leqq M\,||x||, \qquad (x \in X_0).$$

Marginea inferioară a numerelor M pentru care inegalitatea precedentă are loc va fi notată $||g||_{X_0}$ şi va fi numită norma lui g în X_0. Teorema II se aplică fără modificare în acest caz: vom avea

$$||g||_{X_0} = \sup\{||g(x)|| : ||x|| = 1,\ x \in \overline{B}_1^0\},$$

unde

$$B_1^0 = B(O_X;\ 1) \cap X_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să aplicăm aceste consideraţii aplicaţiei $f \circ f$. Această aplicaţie este definită pe tot spaţiul. Să punem

$$g(x) = (f \circ f)\ (x),$$

de unde

$$||g|| = ||f \circ f|| = \sup \{||(f \circ f)(x)|| : ||x||,\ x \in \overline{B}_1^0\}.$$

Pe de altă parte, punînd $f(x) = y$, putem scrie $g(x) = f(y)$, unde $y \in X_0$, de unde

$$||g(x)|| \leqq ||f||_{x_0} . ||f(x)||,$$

deci egalitatea precedentă devine

$$||f \circ f|| \leqq ||f||_{X_0} . \sup \{||f(x)|| : ||x||,\ x \in \overline{B}_1^0\},$$

de unde, în definitiv, suprimînd indicele X_0,

$$||f \circ f|| \leqq ||f||_{X_0} \cdot ||f|| \leqq ||f||^2.$$

Vom pune, pentru uşurinţa scrierii,

$$f \circ f = f^2.$$

Prin recurenţă vom defini simbolul f^n, care reprezintă o aplicaţie lineară şi continuă definită pe spaţiul X. Inegalitatea de mai sus se generalizează în felul următor

$$||f^n|| \leqq ||f||^n.$$

§ 3. TEOREMA DE PRELUNGIRE A LUI HAHN-BANACH

4.3.1. Fie X un spaţiu vectorial normat, L o varietate liniară[1] a lui X.

Fie, de asemenea, $f_L : L \to Y$ o aplicaţie lineară şi continuă a lui L în un spaţiu vectorial normat Y. Poate fi prelungită această aplicaţie la spaţiul întreg X?

La această întrebare s-a dat răspuns afirmativ în cîteva cazuri particulare (toate referindu-se numai la spaţiul valorilor, adică la spaţiul Y). Din acestea, cel mai important în aplicaţii este, fără îndoială, primul răspuns dat independent de către H. Hahn şi S. Banach, în cazul $Y = \mathbf{R}$.

[1] Nu neapărat închisă, deci nu neapărat un subspaţiu.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă (Hahn-Banach). *Fie X un spațiu vectorial normat real și L o varietate liniară în X. Fie, de asemenea, $f_L : L \to \mathbf{R}$ o aplicație liniară și continuă. Există o aplicație liniară și continuă $f : X \to \mathbf{R}$ cu proprietățile următoare:*

1° $f | L = f_L$ (adică: $x \in L$ implică $f(x) = f_L(x)$);

2° $\|f\| = \|f_L\|$.

Demonstrația acestei teoreme va fi considerabil ușurată de prezentarea a două propoziții preliminare; prima avînd caracterul unei simple observații, a doua constituind cheia întregii demonstrații.

Lema 1. *Pentru orice aplicație liniară și continuă f_{L_1} care prelungește aplicația f_L la o varietate liniară $L_1 \supset L$, avem*

$$\|f_{L_1}\| \geqq \|f_L\|.$$

În adevăr, din $L \subset L_1$ deducem

$$B(O_X;\ 1) \cap L \subseteq B(O_X;\ 1) \cap L_1,$$

deci

$$\sup_{\substack{\|x\| \leqq 1 \\ x \in L}} \|f_L(x)\| \leqq \sup_{\substack{\|x\| \leqq 1 \\ x \in L_1}} \|f_{L_1}(x)\|.$$

Lema 2. *Fie X un spațiu vectorial normat și L o varietate liniară a sa. Fie, de asemenea, $f_L : L \to R$ o funcțională liniară și continuă și $y \in \complement L$, altfel arbitrar. Dacă punem*

$$L_1 = \{x + ty : x \in L,\ t \in R\},$$

atunci:

1° *L_1 este o varietate liniară (care conține pe L);*

2° *există o funcțională liniară și continuă $f_{L_1} : L_1 \to R$, care prelungește pe f la L_1 și astfel încît $\|f_{L_1}\| = \|f_L\|$.*

Pentru demonstrarea primei părți a lemei, să considerăm un punct $z \in L_1$. Vom arăta, în primul rînd, că există un singur punct $x \in L$ și un singur număr real t astfel încît să avem

$$z = x + ty. \tag{1}$$

(Aceasta înseamnă că există o bijecție $z \leftrightarrow (x, t)$ între L_1 și $L \times R$, care realizează egalitatea precedentă.)

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, dacă am avea, de asemenea,

$$z = x' + t'y$$

cu $x' \neq x$, $t' \neq t$, am deduce imediat

$$y = -\frac{1}{t' - t}(x' - x) \in L,$$

ceea ce contrazice una din datele lemei.

Pe baza unicităţii reprezentării (1), prima parte a lemei se justifică imediat. În adevăr, din (1) deducem, dacă $\alpha \in R$,

$$\alpha z = \alpha x + \alpha t y,$$

deci $\alpha z \in L$.

Apoi, dacă $z' \in L_1$, deci dacă

$$z' = x' + t'y, \quad (x' \in L,\ t' \in R),$$

deducem

$$z + z' = x + x' + (t + t')y \in L_1.$$

Pentru $t = 0$ obţinem $z = x$, deci $L_1 \supseteq L$.

Înainte de a trece la stabilirea celei de-a două părţi a lemei, vom face o mică simplificare, care nu va micşora generalitatea raţionamentului.

Observînd că dacă f_L se prelungeşte la f_{L_1}, atunci λf_L (cu $\lambda \in R$) se prelungeşte la λf_{L_1}, putem, în primul rînd, raţiona asupra lui λf_L şi, în al doilea rînd, putem alege pe λ astfel încît să avem $\|\lambda f_L\| = 1$. Este suficient să luăm $|\lambda| = \frac{1}{\|f_L\|}$. Aceasta revine, în definitiv, la a presupune de la început că avem $f_L = 1$.

Să definim acum o funcţională lineară $f_L : L_1 \to R$, lineară şi continuă, în modul următor:

$$f_{L_1}(z) = f_L(x) + \alpha t.$$

În această definiţie, (x, t) este perechea care corespunde, în $X \times R$, prin bijecţia de mai sus, lui z. Lui y îi corespunde perechea $(0_X, 1)$, deci $f_{L_1}(y) = \alpha$.

Este uşor de verificat că f_{L_1} este lineară (exerciţiu!). Vom arăta că putem determina scalarul α (care pentru moment este arbitrar) astfel încît să avem

$$\|f_{L_1}\| \leqq 1. \tag{1'}$$

Va rezulta atunci din prima lemă că $\|f_{L_1}\| = 1 = \|f_L\|$.

Condiţia (1') este echivalentă cu următoarea :

$$|f_{L_1}(z)| \leqq ||z||,$$

adică

$$|f_L(x) + \alpha t| \leqq ||x + ty||$$

sau

$$\left|f_L\left(\frac{1}{t}x\right) + \alpha\right| \leqq \left\|\frac{1}{t}x + y\right\|,$$

sau încă, punînd $x' = \frac{1}{t}x$,

$$-f_L(x') - ||x' + y|| \leqq \alpha \leqq -f_L(x') + ||x' + y||. \qquad (2)$$

Să observăm însă că pentru orice pereche (x', x'') de puncte din L putem scrie

$$f_L(x') - f_L(x'') = f_L(x' - x'') \leqq ||x' - x''|| \leqq ||x' + y|| + ||x'' + y||,$$

de unde

$$-f(x'') - ||x'' + y|| \leqq -f(x') + ||x' + y||,$$

de unde

$$\sup_{x \in L}\{-f_L(x) - ||x + y||\} \leqq \inf_{x \in L}\{-f_L(x) + ||x + y||\}.$$

Există deci cel puţin un număr real α care verifică dubla inegalitate (2), deci cel puţin un număr real α pentru care $||f_{L_1}|| \leqq 1$.

4.3.2. Demonstrarea teoremei de prelungire rezultă acum imediat din lemele precedente.

Să notăm cu F mulţimea tuturor funcţionalelor lineare şi continue $f_Y : Y \to \mathbf{R}$, unde Y este o varietate lineară care conţine pe L. Lema 2 ne asigură că această mulţime nu este vidă.

Vom ordona (parţial) mulţimea F astfel :

$$f_{Y'} < f_{Y''} \Leftrightarrow Y' \subseteq Y''.$$

Fie $\{f_{Y_i}\}_{i \in I} = F_I$ o parte a lui F, total ordonată de relaţia „$<$". Aceasta revine la a afirma ca familia $\{Y_i\}_{i \in I}$ este total ordonată de relaţia de incluziune. Vom arăta că F_I are o margine superioară.

În adevăr, să punem

$$Z = \bigcup_{i \in I} Y_i.$$

Se verifică imediat (exercițiu!) că Z este o varietate liniară. Vom defini funcționala liniară $f_Z : Z \to R$ în felul următor:

$$f_Z(x) = f_{Y_i}(x), \text{ dacă } x \in Y_i.$$

Evident, $||f_Z|| = 1$ și $f_Z | L = f_L$. Deci $f_Z \in F$.

Deoarece $Z \supseteq Y_i$ oricare ar fi $i \in I$, rezultă

$$f_Z > f_{Y_i}$$

oricare are fi $i \in I$, deci f_Z este un majorant pentru F_I. În asemenea condiții axioma lui Zorn este aplicabilă: F are un element maximal f_E Dacă $E \subset X$, atunci lema 2 ne arată că f_E nu este un element maximal, deci $E = X$: cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Observație. Teorema de prelungire a lui Hahn și a lui Banach se extinde fără dificultate la cazul unui spațiu vectorial normat complex. Această extensiune a fost dată independent de Bohnenblust și Sobczyk și de Sukhomlinov[1].

Exerciții: 1° Fie X un spațiu vectorial normat și $x_0 \in X$. Să se arate că există o aplicație liniară $f_0 : X \to R$ cu proprietățile următoare:

1) $||f_0|| = l$; 2) $f_0(x_0) = ||x_0||$.

R. Se va pune $L = \{\alpha x_0\}_{\alpha \in R}$. Se va verifica că L este o varietate liniară. Se va defini $f_L : L \to R$ astfel: $f_L(x) = \alpha ||x_0||$ dacă $x = \alpha x_0$. Se va arăta că $||f_L|| = 1$ și se va aplica teorema de prelungire.

2° Fie X un spațiu vectorial normat și $x_0 \in X$. Dacă pentru *orice* aplicație liniară și mărginită $f : X \to R$ avem

$$f(x_0) = 0,$$

atunci $x = 0_X$.

(Altfel spus: Dacă f este ortogonal lui x_0 pentru *orice* $f \in X^*$, atunci $x_0 = O_X$.)

R: Printre elementele lui X^* există funcționala f_0 din ex. precedent, pentru care $f_0(x_0) = ||x_0||$.

---

[1] Pentru detaliile demonstrației, cititorul poate consulta: Miron Nicolescu. *Analiza Matematică*, II 1958, p. 286–287.

3° Fie X un spațiu vectorial normat, Y un subspațiu al său și $x_0 \notin Y$. Există o funcțională liniară continuă f astfel încît $f(x_0) = 1$ și $f|Y = 0$.

R: Mulțimea vectorilor de forma $y + \alpha x_0$, unde $y \in Y$ și $\alpha \in R$, formează o varietate liniară $L \subseteq X$. Să observăm că dacă $z = y + \alpha x_0$ și $z = y' + \alpha' x_0$ $(y' \in Y,\ \alpha' \in R,\ y' \neq y,\ \alpha' \neq \alpha)$, atunci

$$x_0 = -\frac{1}{\alpha' - \alpha}(y' - y) \in Y,$$

ceea ce este absurd. Așadar, orice vector din L se scrie într-un singur mod sub forma $z = y + \alpha x_0$.

Vom pune $f_L(z) = \alpha$; f_L este vizibil liniară.
Dacă f_L nu ar fi mărginită, ar exista un șir $\{z_n\} = \{y_n + \alpha_n x_0\}$ astfel încît $||z_n|| = 1$ și $|f_L(z_n)| \to \infty$, adică $|\alpha_n| \to \infty$. Dar

$$||z_n|| = |\alpha_n| \cdot \left\| \frac{y_n}{\alpha_n} + x_0 \right\| = 1.$$

Deci, dacă $|\alpha_n| \to \infty$, atunci $\left\| \frac{1}{\alpha_n} y_n + x_0 \right\| \to 0$, adică $-\frac{1}{\alpha_n} y_n \to x_0$. Ar rezulta de aici $x_0 \in Y = \overline{Y}$. Deci f_L este mărginită. Nu mai rămîne decît să aplicăm teorema de prelungire a lui Hahn-Banach.

4° Cu datele din ex. 1° să se arate că există o funcțională f de normă dată, astfel încît $f(x_0) = ||f|| \cdot ||x_0||$.

R: În exercițiul 1° se va pune $f = |\lambda| f_0$ și se va alege $|\lambda|$ în consecință.

5° Fiecărei aplicații liniare și continue $f: X \to Y$ i se poate asocia o aplicație $f^*: Y^* \to X^*$ în felul următor: Fie $y^* \in Y^*$, arbitrar. Atunci $y^*(f(x))$ este o funcțională liniară definită pe X. Vom pune $y^* \circ f = x^*$. În felul acesta, fiecărui $y^* \in Y^*$ facem să-i corespundă un $x^* \in X^*$. Aplicația $f^* = y^* \to x^*$ se numește *adjuncta*, sau *duala* aplicației f.

Să se arate:

1° că f^* este liniară și mărginită.

2° că $||f^*|| = ||f||$.

R: Linearitatea este evidentă. Să observăm că $(f^* \circ y^*)(x) = y^*(f(x))$, de unde

$$|(f^* \circ y^*)(x)| = |y^*(f(x))| \leqq ||y^*|| \cdot ||f(x)|| \leqq ||y^*|| \cdot ||f|| \cdot ||x||.$$

Deci

$$||f^*(y^*)|| \leqq ||f|| \cdot ||y^*||,$$

de unde $||f^*|| \leqq ||f||$. Pentru stabilirea inegalității opuse vom utiliza o aplicație a teoremei lui Hahn-Banach (**4.3.2.**, ex. 4°). Fie $x \in X$ arbitrar. Vom alege elementul $y^* \in Y^*$, astfel încît $||y^*|| = 1$ și $(y^* \circ f)(x) = y^*(f(x)) = ||f(x)||$. Din $y^*(f(x)) = (f^* \circ y^*)(x)$ deducem

$$||f(x)|| = |(f^* \circ y^*)(x)| \leqq ||f^*|| \cdot ||y^*|| \cdot ||x|| = ||f^*|| \cdot ||x||,$$

de unde $||f|| \leqq ||f^*||$.

Scanned with OKEN Scanner

6° Dacă $f \in \mathfrak{L}(X, Y)$, $g \in \mathfrak{L}(X, Y)$, atunci

1) $(f+g)^* = f^* + g^*$; 2) $(\alpha f)^* = \alpha f^*$; 3) Dacă $X = Y$, atunci $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

R: Ne vom ocupa numai de 3). Fie $y^* \in Y^* = X^*$. Pentru $x \in X$ arbitrar avem

$$((g \circ f)^* \circ y^*)(x) = y^*((g \circ f)(x)) = (y^* \circ g)(f(x)) =$$
$$= (g^* \circ y^*)(f(x)) = (f^* \circ (g^* \circ y^*))(x) = ((f^* \circ g^*) \circ y^*)(x),$$

de unde

$$(g \circ f)^* \circ y^* = (f^* \circ g^*) \circ y^*.$$

Cum $y^* \in Y^*$ este arbitrar, deducem în definitiv

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

§ 4. INVERSIUNEA UNEI APLICAŢII LINEARE ŞI CONTINUE. TEOREMA LUI H. STEINHAUS

4.4.1. Fie X, Y două spaţii vectoriale normate.

Fie, de asemenea, $f: X \to Y$ o aplicaţie lineară şi continuă. În ce caz această aplicaţie se poate inversa? Un răspuns parţial la această întrebare este dat de următoarea

Teoremă. *Fiind dată aplicaţia lineară şi mărginită, $f: X \to Y$, aplicaţia $f^{-1}: f(X) \to X$ există şi este lineară dacă şi numai dacă f se anulează numai în originea spaţiului X.*

În adevăr, să presupunem că $f(x) = O_Y$ implică $x = O_X$ şi să considerăm două puncte x', x'', cu $x' \in X$, $x'' \in X$, $x' \neq x''$, pentru care am avea $f(x') = y$, $f(x'') = y$, cu $y \in f(X)$.

Am deduce $f(x' - x'') = O_Y$, de unde $x' = x''$. Aşadar, ecuaţia $f(x) = y$ are pentru fiecare $y \in f(X)$ o singură soluţie $f^{-1}(y)$.

Este vizibil că $f(y)$ este lineară.

4.4.2. Din teorema precedentă *nu* rezultă că inversa f^{-1} este continuă. În cazul în care $f(X)$ este un subspaţiu al lui Y (în care caz putem considera, fără pierderea generalităţii, că $f(X) = Y$), teorema următoare ne dă un răspuns precis la întrebarea pusă:

Teoremă (Hugo Steinhaus). *Dacă X, Y sînt spaţii ale lui Banach şi dacă $f: X \to Y$, este o bijecţie lineară şi continuă, atunci $f^{-1}: Y \to X$ este lineară şi continuă.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstraţia acestei teoreme de deosebită importanţă în analiza funcţională se face în etape. Teorema va fi în fapt consecinţa imediată a cîtorva propoziţii preliminarii. Pentru simplitate vom nota cu $B(x\,;r)$, bulele din spaţiul X, cu $B'(y\,;r')$ bulele din spaţiul Y. Vom pune, de asemenea,

$$B_r = B(O_X\,;r),\quad B'_{r'} = B'(O_Y\,;r').$$

Cu aceste explicaţii putem enunţa

Lema 1. *f^{-1} este mărginită dacă şi numai dacă există $r>0$ astfel încît să avem*

$$f(B_1) \supseteq B'_r.$$

În adevăr, dacă incluziunea din enunţ este verificată pentru un anumit număr pozitiv r, deducem din această incluziune

$$f^{-1}(B'_r) \subseteq B_1,$$

ceea ce se mai poate scrie

$$f^{-1}(B'_1) \subseteq B_{1/r}.$$

Dar aceasta înseamnă că

$$\sup_{\|y\|\leqq 1} \|f^{-1}(y)\| < \infty,$$

deci f^{-1} este mărginită.

Reciproc, dacă f^{-1} este mărginită, atunci există un număr pozitiv s astfel încît

$$f^{-1}(B'_1) \subseteq B_s,$$

de unde

$$f(B_s) \supseteq B'_1,$$

ceea ce se mai poate scrie, punînd $\frac{1}{s} = r$,

$$f(B_1) \supseteq B'_r.$$

Lema 2. *În condiţiile teoremei precedente, există o sferă $B'(y\,;r)$ în care $f(B_1)$ este densă.*

Să presupunem contrariul; atunci $f(B_k)$ nu va fi densă în nici o bulă din Y oricare ar fi k. Fie B'_0 o bulă *închisă*, altfel arbitrară, de rază r'_0, a spaţiului Y. $f(B_1)$ nu este densă în B'_0, deci există o bulă închisă $\overline{B}'_1 \subset \overline{B}'_0$, disjunctă de $f(B_1)$. Putem alege raza r'_1 a acestei bule astfel încît să avem $r'_1 < \frac{r'_0}{2}$.

$f(B_2)$ nu este densă în B_1', deci există o bulă închisă $\overline{B}_2' \subset \overline{B}_1'$ de rază $r_2' < \frac{r_1'}{2}$, disjunctă de $f(B_2)$; ș.a.m.d. Obținem, prin recurență, șirul *descendent* $\{\overline{B}_n'\}_{n\in N}$ de mulțimi închise, de diametru tinzînd către zero. Spațiul Y fiind complet, există un punct $y \in Y$, comun tuturor mulțimilor precedente. Cum f este o bijecție, există un punct $x \in X$, astfel încît $f(x)=y$.

Să alegem numărul natural p astfel încît $||f|| < p$. Atunci $f \in B_p$, de unde $y \in f(B_p)$. Pe de altă parte, $y \in \overline{B}_p'$, deci $y \notin f(B_p)$. Așadar, există o sferă $B'(y\,;r)$ în care $f(B_1)$ este densă.

Corolar. *În condițiile precedente, există o bulă* $B_r' = B'(O_Y\,;\,r')$ *în care* $f(B_1)$ *este densă.*

În adevăr, am arătat că există o bulă $B'(y\,;r')$, astfel încît

$$\overline{f(B_1)} \supseteq B'(y\,;r').$$

Există deci un punct $y_0 \in B'(y\,;r')$, astfel încît $y_0 \in f(B_1)$. Fie $f(x_0) = y_0$. Există r_0' astfel încît $B'(y_0\,;r_0') \subseteq B'(y\,;r')$.
Vom avea, cu atît mai mult,

$$\overline{f(B_1)} \supseteq B'(y_0\,;r_0').$$

Deducem de aici că mulțimea $\{f(x-x_0) : x \in B_1\}$ este densă în bula B_r'. Dar

$$\{f(x-x_0) : x \in B_1\} \subseteq f(B_2),$$

de unde

$$B_r' \subseteq \overline{\{f(x-x_0) : x \in B_1\}} \subseteq \overline{f(B_2)}.$$

Deci $f(B_2)$ este densă în B_r', de unde rezultă că $f(B_1)$ este densă în $B_{r/2}'$.

Lema 3. *În conditiile teoremei precedente există o sferă* $B_s' \subset Y$, *astfel încît* $f(B_1) \supseteq B_s'$.

În adevăr, din corolarul precedent știm că $\overline{f(B_1)} \supseteq B_r'$, unde r este un anumit număr pozitiv. Fie $y_0 \in B_r'$, altfel arbitrar, și $\theta \in (0,1)$. Vom arăta că putem construi două șiruri $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ cu proprietățile următoare: 1° $\lim x_n = x_0$; 2° $y_n = f(x_n)$; 3° $\lim f(x_n) = y_0$; 4° $||x_0|| < \frac{1}{1-\theta} = 1+\theta'$, $\theta' \in (0,1)$. De aici va rezulta, f fiind continuă, că $y_0 = f(x_0)$. Cum y_0 este arbitrar în B_r', va rezulta că $f(B_{1+\theta'}) \supseteq B_r'$, de unde $f(B_1) \supseteq B_s'$, cu $s = \frac{r}{1+\theta}$.

Scanned with OKEN Scanner

Șirurile $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ se vor construi astfel: întrucît $f(B_1)$ este densă în B'_r, există un element $x_1 \in B_1$, astfel încît $f(x_1) = y_1$ este suficient de aproape de y_0:

$$||y_1 - y_0|| < r\theta.$$

Cum $f(B_i)$ este densă în B'_r, $f(B_0)$ va fi densă în $B'_{\theta r}$. De aici rezultă că $f(B(x_1; \theta))$ este densă în $B^*(y_1; r\theta)$. Deci există un element $x_2 \in B(x_1; \theta)$, astfel încît

$$||y_2 - y_0|| < r\theta^2,$$

cu $y_2 = f(x_2)$, deoarece

$$y_0 \in B^*(y_1; r\theta).$$

Mulțimea $f(B(x_2; \theta^2))$ este densă în $B^*(y_2; r\theta^2)$, deci există $x_3 \in B(x_2; \theta^2)$, astfel încît, punînd $y_3 = f(x_3)$, să avem

$$||y_3 - y_0|| < r\theta^3$$

și așa mai departe. Prin recurență obținem

$$||x_n - x_{n-1}|| < \theta^{n-1}, \quad ||y_n - y_0|| < r\theta^n, \quad (y_n = f(x_n))$$

de unde, pe de o parte,

$$\lim y_n = y_0,$$

iar, pe de altă parte,

$$||x_{n+p} - x_n|| \leqq ||x_{n+1} - x_n|| + ||x_{n+2} - x_{n+1}|| + \ldots + ||x_{n+p} - x_{n+p-1}||,$$

de unde

$$||x_{n+p} - x_n|| < \theta^n + \theta^{n+1} + \ldots + \theta^{n+p} < \frac{\theta^n}{1-\theta},$$

deci șirul $\{x_n\}$ este fundamental. Fie $x_0 = \lim x_n$.

Din egalitatea

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

deducem

$$||x_n|| < \frac{1}{1-\theta} = 1 + \theta',$$

deci $||x_0|| \leqq 1 + \theta'$.

Cu aceasta lema este demonstrată.

Teorema enunțată este o consecință imediată a lemelor 1 și 3.

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. APLICAȚII ÎNCHISE

4.5.1. Fie X, Y două spații vectoriale normate, E o varietate lineară a spațiului X.

Vom spune că o aplicație liniară $f: E \to Y$ este *închisă* dacă pentru orice șir $\{x_n\}_{n\in N} \subset E$, convergent către x, avem implicația

$$\lim f(x_n) = f_0 \Leftrightarrow x \in E \,\&\, f(x) = f_0.$$

Exemplu. Orice aplicație $f: X \to Y$ liniară și continuă este închisă, deoarece $x_n \to x$ implică $f(x_n) \to f(x)$.

4.5.2. Să considerăm acum produsul cartezian $X \times Y$.

Vom organiza acest produs cartezian ca un spațiu vectorial normat în felul următor:

1) Dacă $\{x, y\} \in X \times Y$ și $\alpha \in K$, atunci

$$\alpha\{x, y\} = \{\alpha x, \alpha y\}.$$

2) Dacă $\{x', y'\} \in X \times Y$ și $\{x'', y''\} \in X \times Y$, atunci

$$\{x', y'\} + \{x'', y''\} = \{x' + x'', y' + y''\}.$$

3) Dacă $\{x, y\} \in X \times Y$, atunci

$$||\{x, y\}|| = ||x|| + ||y||.$$

Se poate verifica (exercițiu!) că aceste condiții sînt suficiente pentru a organiza mulțimea $X \times Y$ ca un spațiu vectorial normat.

Dacă $f: E \to Y$ este o aplicație, *graficul* acestei aplicații este, după cum știm, partea din $X \times Y$ definită astfel:

$$\{x, f(x) : x \in E\}.$$

Cititorul va verifica singur că dacă f este liniară, atunci graficul său este o varietate lineară a spațiului $X \times Y$.

Exerciții: Dacă X, Y sînt spații ale lui Banach, atunci $X \times Y$ este un spațiu al lui Banach.

Cu aceste pregătiri putem enunța

Teorema I (*„teorema graficului închis"*). *Dacă X, Y sînt spații ale lui Banach și E o varietate lineară în spațiul X, o aplicație liniară $f: E \to Y$ este închisă dacă și numai dacă graficul său este închis.*

Să presupunem, în adevăr, că aplicația $f: E \to Y$ este închisă și fie $\{x, f_0\}$ un punct de acumulare al graficului. Există un șir $\{x_n, f(x_n)\}_{n \in N}$ de puncte ale graficului care tinde către $\{x, f_0\}$. Spațiul $X \times Y$ fiind complet, avem $\{x, f_0\} \in X \times Y$, deci

$$\lim ||x - x_n, f_0 - f(x)|| = \lim ||x - x_n|| + \lim ||f_0 - f(x_n)|| = 0,$$

de unde

$$\lim x_n = x, \lim f(x_n) = f_0.$$

Aplicația f fiind închisă, avem $f_0 = f(x)$, deci $\{x, f_0\}$ aparține graficului și acesta este o mulțime închisă.

Reciproc, să presupunem graficul închis: deci, dacă $\{x, f_0\}$ este un punct de acumulare al său, el aparține graficului, adică $f_0 = f(x)$.

Fie în asemenea condiții $\{x_n\}_{n \in N} \subset E$, convergent către x. Punctul $\{x_n, f(x)\} \in X \times Y$ aparține graficului aplicației f. Acest grafic este închis. Deci, dacă $\lim f(x_n) = f_0$, atunci punctul $\{x_n, f_n(x_n)\}$ are o limită $\{x, f_0\}$ care aparține graficului, deci $f_0 = f(x)$ și aplicația este închisă.

Teorema II. *Dacă aplicația liniară $f: X \times Y$ a unui spațiu X al lui Banach într-un alt spațiu Y al lui Banach este închisă, atunci ea este continuă.*

Fie $\Gamma \subset X \times Y$ graficul aplicației f. În baza teoremei precedente, Γ este o mulțime închisă.

Deci este un subspațiu al spațiului $X \times Y$. Cum ultimul spațiu este complet, rezultă că Γ este complet, deci un spațiu al lui Banach.

Să considerăm aplicația $g: \Gamma \to X$ definită, pentru orice punct $\{x f(x)\} \in \Gamma$ de egalitatea $g(\{x, f(x)\}) = x$. Este vizibil că g este liniară și, continuă. Mai mult decît atît, g este o bijecție între Γ și X. Deci (4.5.2.) aplicația g^{-1} este mărginită. Deducem

$$||g^{-1}(x)|| = ||\{x, f(x)\}|| = ||x|| + ||f(x)|| \leqq ||g^{-1}|| \cdot ||x||,$$

de unde

$$||f(x)|| \leqq (||g^{-1}|| - 1)||x||,$$

deci

$$||f|| \leqq ||g^{-1}|| - 1.$$

Exerciții: 1° Dacă $f: X \to Y$ este liniară și continuă, atunci aplicația $x \to ||f(x)||$ este continuă.

R: Fie $x' \in X$, $x'' \in X$; putem scrie

$$||f(x')|| \leqq ||f(x' - x'')|| + ||f(x'')|| \leqq ||f|| \cdot ||x' - x''|| + ||f(x'')||$$

și o inegalitate analogă permutînd rolul accentelor.

Obținem

$$|||f(x')|| - ||f(x'')||| \leqq ||f(x') - f(x'')||.$$

Scanned with OKEN Scanner

2° Dacă $\{f_n\}_{n\in N}$ este un șir de aplicații lineare $X \to Y$ și dacă există o bulă $B(x_0; r)$ și un număr pozitiv M astfel încît

$$x \in B(x_0; r) \Rightarrow ||f_n(x)|| < M,$$

oricare ar fi n, atunci șirul $\{||f_n||\}_{n\in N}$ este mărginit.

R: Fie $x \in B(O_X; r) = B_r$. Atunci

$$f_n(x) = f(x + x_0) - f_n(x_0),$$

de unde

$$||f_n(x)|| \leqq 2M.$$

Deducem $||f_n|| \leqq \frac{2M}{r}$.

3° Fie $\{f_n\}_{n\in N}$ un șir de aplicații lineare și continue ale spațiului X al lui Banach în spațiul Y al lui Banach. Dacă șirul $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ este mărginit pentru orice $x \in X$, atunci șirul $\{||f_n||\}_{n\in N}$ este mărginit.

(Principiul mărginirii uniforme.)

R: Dacă $\{||f_n||\}$ nu este mărginit, aceasta înseamnă că șirul $\{||f_n(x)||\}$ nu este mărginit în nici o bulă închisă $\overline{B(x_0; r)}$. Să construim un șir $\{K_n\}_{n\in N}$ *descendent* de bule închise, de raze tinzînd către zero, în felul următor: K_1 va fi arbitrară, de rază r_1. Prin ipoteză, există un punct $x_1 \in K_1$ și un număr natural n_1 astfel încît $||f_{n_1}(x_1)|| > 1$. Dar atunci, în baza exercițiului 1°, există o bulă închisă $K_2 \subseteq K_1$, cu centrul în x_1 și cu raza $r_2 < \frac{r_1}{2}$, astfel încît $x \in K_2 \Rightarrow ||f_{n_1}(x)|| > 1$. Pe de altă parte, în baza ipotezei, există un punct $x_2 \in K_2$ și un număr natural $n_2 > n_1$, astfel încît $||f_{n_2}(x_2)|| > 2$, deci o bulă $K_3 \subseteq K_2$, de rază $r_3 < \frac{r_2}{2}$, astfel încît $x \in K_3 \Rightarrow ||f_{n_1}(x)|| > 2$. Obținem astfel șirul descendent $\{K_n\}_{n\in N}$ de bule închise, cu un punct comun y, precum și șirul crescător $\{n_k\}_{k\in N}$ de numere naturale. În punctul y vom avea $||f_{n_k}(y)|| > n_k$, deci șirul $\{f_n(x)\}$ nu este mărginit în punctul y, ceea ce contrazice ipoteza.

§ 6. PROIECȚII

4.6.1. Fie X un spațiu vectorial normat și X', X'' două subspații (adică: două varietăți lineare *închise*) ale lui X, avînd ca unic element comun originea O_X.

Fie, de asemenea, $x \in X$, altfel arbitrar. Dacă există $x' \in X'$ și $x'' \in X''$, astfel încît

$$x = x' + x'', \tag{1}$$

vom spune că X este *suma directă* a spațiilor X', X'' și vom scrie $X = X' \oplus X''$.

Să observăm că descompunerea (1) este unică. În adevăr, să presupunem că ar exista

$$x_1' \in X',\ x_1'' \in X'',\ x_1' \neq x',\ x_1'' \neq x'',$$

astfel încît

$$x = x_1' + x_1''.$$

Am deduce

$$x' - x_1' = x_1'' - x'',$$

cu $x' - x_1' \in X'$, $x_1'' - x'' \in X''$, de unde (spațiile X', X'' fiind disjuncte)

$$x' = x'_1,\ x'' = x''_1.$$

Spațiile X', X'' sînt, prin definiție, *complementare* unul altuia, în raport cu X.

4.6.2. Din cele de mai sus rezultă că fiecărei perechi $\{X', X''\}$ de subspații complementare ale lui X îi corespunde, pentru orice element $x \in X$, descompunerea *unică*

$$x = x' + x'',\ x' \in X',\ x'' \in X''.$$

Să considerăm aplicația $p : x \to x'$ a spațiului X în el însuși. Ne propunem să studiem mai îndeaproape proprietățile acestei aplicații.

În primul rînd, dacă $x \in X$, $y \in X$, avem, respectiv,

$$x = x' + x'',\ y = y' + y'',$$

de unde

$$x + y = (x' + y') + (x'' + y''),$$

cu $x' + y' \in X'$, $x'' + y'' \in X''$.

Deci

$$p(x + y) = p(x) + p(y).$$

În al doilea rînd, dacă $x = x' + x''$, atunci

$$\alpha x = \alpha x' + \alpha x'',\ \alpha x' \in X',\ \alpha x'' \in X'',$$

deci

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Așadar p este o aplicație liniară.

Să considerăm, în al doilea rînd, un șir $\{x_n\}_{n \in N}$ convergent către x. Atunci, pentru orice n,

$$x = x_n' + x_n'',\ x_n' \in X',\ x_n'' \in X''.$$

Să presupunem șirul $\{x'_n\}$ convergent. Atunci șirul $\{x''_n\}$ este și el convergent. Fie, respectiv,

$$x' = \lim x'_n, \qquad x'' = \lim x''_n.$$

Evident,

$$x = x' + x''.$$

Deci $p(x_n) = x'_n$ converge către $x' = p(x)$ și aplicația p este *închisă*.

Cum p este liniară și definită pe tot spațiul X, rezultă că p este mărginită (**4.6.2.**, teorema II).

Să observăm, mai departe, că

$$p(p(x)) = p(x') = x' = p(x),$$

adică $p^2 = p$. Aplicația p face parte deci din clasa aplicațiilor f pentru care $f^2 = f$. Astfel de aplicații se cheamă aplicații *idempotente*.

Să mai observăm, în sfîrșit, că

$$X' = \{x : p(x) = x\},$$
$$X'' = \{x : p(x) = O_X\}.$$

Aplicația $p : x \to x'$ depinde, evident, de perechea (X', X'') de spații complementare. Din această cauză se spune că p este *asociată* perechii (X', X'').

4.6.3. Să considerăm, acum, o aplicație $p : X \to X$, liniară, mărginită și idempotentă.

Există o descompunere $X = X' \oplus X''$, astfel încît p să fie *asociată* perechii (X', X'') în semnul specificat mai sus? Răspunsul este afirmativ. El este conținut în următoarea:

Teoremă. *Fie $p : X \to X$ o aplicație liniară, mărginită și idempotentă.*

Să punem

$$X' = \{x : p(x) = x\}, \quad X'' = \{x : p(x) = O_X\}.$$

Atunci $X = X' \oplus X''$ și aplicația liniară mărginită și idempotentă, asociată perechii (X', X''), este tocmai p.

Să observăm că din modul în care a fost definit X', această mulțime constituie mulțimea valorilor lui p. De asemenea, X'' este mulțimea valorilor aplicației $I - p$, unde I este aplicația identică.

Scanned with OKEN Scanner

Este vizibil că X', X'' sînt subspații ale lui X. Fie $x \in X' \cap X''$. Atunci avem simultan $p(x) = x$ și $p(x) = O_X$, de unde $x = O_X$.

Fie, în al doilea rînd, $x \in X$, altfel arbitrar.

Putem scrie identitatea

$$x = f(x) + (x - f(x)).$$

Cum $f(x) \in X'$ și $x - f(x) \in X''$, rezultă că $X = X' \oplus X''$. Este evident, acum, că aplicația idempotentă asociată perechii (X', X'') este tocmai p.

Teorema precedentă justifică următoarea definiție: O aplicație $p : X \to X$, lineară, mărginită și idempotentă se numește o *proiecție*.

Perechea de mulțimi (subspații ale lui X)

$$X' = \{x : p(x) = x\},\ X'' = \{x : p(x) = O_X\}$$

este *perechea asociată lui* p.

Prin definiție, p *este o proiecție a spațiului* X *pe subspațiul* X'.

Exerciții: 1° Fie $\{X', X''\}$ o pereche de subspații complementare ale lui X și $f : X \to X$ o aplicație lineară și continuă. Fie, de asemenea, p proiecția asociată perechii precedente. Vom avea

$$f \circ p = p \circ f$$

dacă și numai dacă

$$f(X') \subseteq X' \text{ și } f(X'') \subseteq X''. \tag{1}$$

R: Să presupunem incluziunile precedente verificate și să considerăm un element $x' \in X'$.

Atunci $p(x') = x'$. Pe de altă parte, $f(x') \in X'$ deci $(p \circ f)(x') = f(x')$. Cum $(f \circ p)(x') = f(x')$, rezultă că în X' avem $f \circ p = p \circ f$. În același mod se arată că egalitatea are loc și în X'', deci, în baza faptului că orice element $x \in X$ se scrie sub forma $x = x' + x''$, rezultă, în baza liniarității, că egalitatea are loc în X.

Reciproc, dacă $f \circ p = p \circ f$, atunci pentru $x' \in X'$ găsim că $f(x') = (f \circ p)(x') = (p \circ f)(x')$, de unde rezultă că $f(x') \in X'$, deci $f(X') \subseteq X'$. La fel se arată că $f(X'') \subseteq X''$.

Observație. Prin definiție, o pereche (X', X'') de subspații complementare ale lui X *reduce* o aplicație $f : X \to X$ lineară și mărginită, dacă incluziunile (1) sînt verificate.

Scanned with OKEN Scanner

2° Să se arate că dacă p_1, p_2 sînt proiecţii şi $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$, atunci $p_1 \circ p_2$ este o proiecţie.

3° Să se arate că dacă p_1, p_2 sînt proiecţii şi $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$, atunci $p_1 + p_2 - 2p_1 \circ p_2$ este o proiecţie.

§ 7. MULŢIMEA REZOLVANTĂ A UNUI OPERATOR. SPECTRUL UNUI OPERATOR

4.7.1. Fie $f : X \to X$ un operator continuu, definit pe spaţiul X al lui Banach.

Vom nota cu $\rho(f)$ mulţimea tuturor numerelor complexe pentru care operatorul $(\xi I - f)^{-1}$, unde I este operatorul identic, este definit pe o varietate lineară X_0 densă în X şi este continuu pe X_0.

Complementara mulţimii $\rho(f)$ se notează cu $\sigma(f)$ şi se numeşte *spectrul* operatorului f.

Mulţimea $\sigma(f)$ se descompune în mod natural în trei mulţimi:

1) Mulţimea $\sigma_p(f)$ a numerelor ξ pentru care $\xi I - f$ nu se poate inversa. Orice număr al acestei mulţimi se numeşte *valoare proprie* a operatorului f. Mulţimea $\sigma_p(f)$ însăşi se numeşte spectrul *punctual* al operatorului f.

2) Mulţimea $\sigma_c(f)$ a numerelor complexe pentru care $(\xi I - f)^{-1}$ există pe o varietate X_0 densă în X, dar nu este mărginită. Această mulţime se numeşte spectrul *continuu* al operatorului f.

3) Mulţimea $\sigma_r(f)$ a numerelor complexe pentru care $(\xi I - f)^{-1}$ există, este continuă, dar mulţimea sa de definiţie (care este $(\xi I - f)(X)$) nu este densă în X. Această mulţime se numeşte spectrul *rezidual* al operatorului f.

4.7.2. Teorema I. *Mulţimea rezolvantă a unui operator f continuu nu este vidă.*

În adevăr, dacă $\zeta \in \rho(f)$, atunci putem scrie

$$R_\zeta(f) = (\zeta I - f)^{-1} = \zeta^{-1}(I - \zeta^{-1} f)^{-1}.$$

Acest lucru ne sugerează studiul seriei

$$\zeta^{-1}(I + \zeta^{-1} f + \zeta^{-2} f^2 + \ldots)$$

în spaţiul $\mathfrak{L}(X)$. Punînd

$$s_n = I + \zeta^{-1} f + \zeta^{-2} f^2 + \ldots,$$

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$\|s_{n+p} - s_n\| \leqq |\zeta^{-n-1}| \cdot \|f^{n+1}\| + \ldots + |\zeta^{-n-p}| \cdot \|f^{n+p}\| \leqq$$
$$\leqq |\zeta^{-1}|^{n+1} \cdot \|f\|^{n+1} + \ldots + |\zeta^{-1}|^{n+p} \cdot \|f\|^{n+p}.$$

Dacă deci $|\zeta^{-1}| \cdot \|f\| < 1$, adică

$$|\zeta| > \|f\|,$$

atunci seria precedentă este convergentă. Fie $g(\zeta)$ suma acesteia. Știm (**4.2.2.**, teorema III) că $g(\zeta)$ este un operator mărginit. Să calculăm $g(\zeta) \circ (\zeta I - f)$. Găsim

$$g(\zeta) \circ (\zeta I - f) = \zeta g(\zeta) - g(\zeta) \circ f = I + \zeta^{-1} f +$$
$$+ \zeta^{-2} f^2 + \ldots - \zeta^{-1} f - \zeta^{-2} f^2 - \ldots = I,$$

deci

$$g(\zeta) = R_\zeta(f).$$

Așadar, orice punct al planului complex, exterior discului închis $|\zeta|^2 \leqq 1$, face parte din $\rho(f)$.

Consecință: $\sigma(f) \subseteq \{\zeta : |\zeta|^2 \leq 1\}$.

Observație. Nu rezultă din incluziunea precedentă că spectrul unui operator mărginit nu este vid. Totuși este adevărat că $\sigma(f) \neq \emptyset$.

Teorema II. *Dacă* $\zeta \in \rho(f)$, $\zeta' \in \rho(f)$ *și dacă* R_ζ, $R_{\zeta'}$ *sînt definiți peste tot în* X, *atunci*

$$R_\zeta(f) - R_{\zeta'}(f) = (\zeta' - \zeta)(R_\zeta \circ R_{\zeta'})(f).$$

În plus $f \circ g = g \circ f$ *implică* $R_\zeta \circ g = g \circ R_{\zeta'}$ *pentru orice operator* $g : X \to X$ *mărginit.*

În adevăr avem

$$R_\zeta(f) = R_\zeta(f) \circ (\zeta' I - f) \circ R_{\zeta'}(f) = (\zeta' - \zeta)(R_\zeta \circ R_{\zeta'} +$$
$$+ R_\zeta(f) \circ (\zeta I - f) \circ R_{\zeta'}(f) = (\zeta' - \zeta)(R_\zeta \circ R_{\zeta'})(f) + R_{\zeta'}(f).$$

Să observăm, în al doilea rînd, că $f \circ g = g \circ f$ implică $(\zeta I - f) \circ g = g \circ (\zeta I - f)$, de unde, compunînd mai întîi la dreapta și apoi la stînga cu R_ζ,

$$R_\zeta \circ g = g \circ R_\zeta.$$

4.7.3. Teorema III. *Dacă* f *este un operator închis, definit pe spațiul* X *al lui Banach, mulțimea rezolvantă* $\rho(f)$ *a acestui operator este deschisă.*

În adevăr, prin ipoteză $\overline{X_0} = X$, unde $X_0 = (\zeta I - f)(X)$, iar

$$\zeta \in \rho(f).$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $y \in X$, altfel arbitrar. Prin ipoteză există un şir $\{y_n\}_{n\in N} \subseteq X_0$, astfel încît $\lim y_n = y$. Din $y_n \in X_0$ deducem existenţa unui element $x_n \in X_0$ (şi a unuia singur!) astfel încît

$$(\zeta I - f)(x_n) = y_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

de unde

$$x_n = (\zeta I - f)^{-1}(y_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Deoarece $y_n \to y$, şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ este fundamentul, deci are o limită x. Cum f este un operator închis, $\zeta I - f$ este închis, deci

$$(\zeta I - f)(x) = y.$$

Aşadar $X_0 = X$, adică R_ζ este definit pe întregul spaţiu x.

Să considerăm, acum, în spaţiul $\mathfrak{L}(X)$ al lui Banach, seria

$$R_\zeta(I + (\zeta - \zeta')R_\zeta + (\zeta - \zeta')^2 R_\zeta^2 + \ldots).$$

Dacă $|\zeta - \zeta'| \cdot \|R_\zeta\| < 1$, această serie este convergentă.
Suma g a acestei serii este un operator mărginit. Să compunem la dreapta (de exemplu) cu operatorul

$$\zeta' I - f = (\zeta' - \zeta)I + (\zeta I - f).$$

Obţinem

$$g \circ (\zeta' I - f) = (\zeta' - \zeta)R_\zeta - (\zeta' - \zeta)^2 R_\zeta^2 - (\zeta' - \zeta)^3 R_\zeta^3 - \ldots$$

$$\ldots + I + (\zeta - \zeta') \cdot R_\zeta + (\zeta' - \zeta)^2 R_\zeta^2 + (\zeta' - \zeta)^3 R_\zeta^3 + \ldots,$$

adică

$$g \circ (\zeta' I - f) = I,$$

de unde

$$g = R_{\zeta'},$$

deci $\zeta' \in \rho(f)$. Aşadar, mulţimea $\rho(f)$ este deschisă.

Teorema IV. *Dacă operatorul continuu $f: X \to X$ nu este identic nul, atunci spectrul său $\sigma(f)$ nu este vid.*

Să considerăm, în adevăr, spaţiul lui Banach $L = \mathfrak{L}(X)$ şi să presupunem că $\sigma(f) = \emptyset$. Din teorema III rezultă atunci că pentru orice element $l^* \in L^*$, funcţia numerică

$$U(\zeta) = l^*(R_\zeta)$$

este holomorfă în vecinătatea oricărui punct ζ al planului complex. Deci U este holomorfă în tot planul. Pe de altă parte, din teorema I rezultă că pentru $|\zeta| > 1$ avem

$$u(\zeta) = \zeta^{-1} + \zeta^{-2} \cdot l^* \circ f + \zeta^{-3} l^* \circ f^2 + \dots .$$

de unde, pentru $|\zeta| > K > \max(1, \|f\|)$,

$$|u(\zeta)| \leqq \frac{1}{K} + \frac{\|l^*\|}{K^2} \cdot \|f\| + \frac{\|l^*\|}{K^3} \|f\|^2 + \dots$$

Așadar, u este holomorfă și mărginită în tot planul. Deci u este o funcție constantă. Cum din inegalitatea precedentă rezultă că

$$\lim_{|\zeta| \to \infty} |u(\zeta)| = 0,$$

deducem că u este funcția nulă. Așadar, pentru un ζ arbitrar

$$l^*(R_\zeta) = 0,$$

oricare ar fi l^*, de unde rezultă

$$R_\zeta = 0_X.$$

Deci $\zeta I - f = 0$, de unde, pentru $\zeta = 0$, $f(x) = 0_X$, oricare ar fi $x \in X$, ceea ce contrazice ipoteza. Așadar $\sigma(f) \supset \emptyset$.

Exerciții: 1° Dacă $f : X \to X$ este un operator mărginit (X este un spațiu al lui Banach), atunci

$$\lim_{n \to \infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$$

există și este finită. Dacă valoarea acestei limite este $r_\sigma(f)$, atunci $r_\sigma(f) \leqq \|f\|$. (Gelfand).

R: Să punem $r = \inf_{n \in N} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$. Va fi suficient să arătăm că $\limsup_{n \to \infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leqq r$. Prin ipoteză, $\varepsilon > 0$ fiind dat, există m natural astfel încît $\|f^m\|^{\frac{1}{m}} < r + \varepsilon$. Un număr natural oarecare n poate fi scris sub forma $n = pm + q$, cu $0 \leqq q < m$. Avem

$$\|f^n\|^{\frac{1}{n}} = \|f^{mp} \circ f^q\|^{\frac{1}{n}} \leqq \|f^m\|^{\frac{p}{n}} \cdot \|f\|^{\frac{q}{n}} \leqq (r + \varepsilon)^{\frac{mp}{n}} \cdot \|f\|^{\frac{1}{n}}.$$

Cum $\frac{mp}{n} \to 1$ și $\frac{q}{n} \to 0$ pentru $n \to \infty$, rezultă că

$$\limsup_{n \to \infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leqq r + \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, existența limitei este stabilită.

Scanned with OKEN Scanner

Din $\|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leqq \|f\|$ oricare ar fi n, deducem $r_\sigma(f) \leqq \|f\|$, deci limita este finită.

2° Să se arate (cu notațiile din ex. precedent) că pentru $|\zeta| > r_\sigma(f)$, R_ζ există și avem

$$R_\zeta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{-n} f^{n-1}.$$

R: Seria din membrul al doilea converge pentru $|\zeta| > r_\sigma(f)$. În adevăr, dacă $|\zeta| \geqq r_\sigma(f) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, atunci $|\zeta^{-n}| \leqslant (r_\sigma(f) + \varepsilon)^{-n}$.

Pe de altă parte, din exercițiul precedent deducem că există n_ε astfel încît $n > n_\varepsilon$ să implice $\|f^n\|^{\frac{1}{n}} < r_\sigma(f) + \frac{\varepsilon}{2}$, de unde $\|\zeta^{-n} f^n\| \leqq (r_\sigma(f) + \varepsilon)^{-n}\left(r_\sigma(f) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n < 1$, ceea ce asigură convergența seriei.

Compunînd la dreapta cu $\zeta I - f$, obținem I, de unde egalitatea cerută.

3°. Cu notațiile din ex. precedente avem

$$r_\sigma(f) = \sup_{\zeta \in \sigma(f)} |\zeta|.$$

R: Din ex. precedent rezultă că $r_\sigma(f) \geqq \sup_{\zeta \in \sigma(f)} |\zeta|$. Dacă $|\zeta| > \sup_{\zeta \in \sigma(f)} |\zeta|$, atunci $\zeta \in \rho(f)$, deci desfășurarea din ex. precedent este valabilă, de unde $\lim \|\zeta^{-n} f^n\| = 0$. Aceasta înseamnă că există n astfel încît $n > n_\varepsilon$ să implice $\|f^n\| < (\sup_{\zeta \in \sigma(f)} |\zeta| + \varepsilon)^n$. Deducem (ex. 1°)

$$r_\sigma(f) = \lim_{n \to \infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leqq \sup_{\zeta \in \sigma(f)} |\zeta|,$$

deci

$$r_\sigma(f) = \sup_{\zeta \in \sigma(f)} |\zeta|.$$

Observație. Formula obținută justifică denumirea de *rază spectrală* care s-a dat numărului $r_\sigma(f)$.

4° Cu notațiile precedente, dacă $|\zeta| < r_\sigma(f)$, seria $\sum_1^\infty \zeta^{-n} f^{n-1}$ este divergentă.

R: Fie r marginea inferioară a numerelor pozitive astfel încît seria $\sum_1^\infty \zeta^{-n} f^{n-1}$ converge pentru $|\zeta| > r$. Deducem $\lim_{n \to \infty} \|\zeta^{-n} f^{n-1}\| = 0$, de unde, cu un raționament analog celui din ex. precedent, $\lim \|f^n\|^{\frac{1}{n}} \leqq r$, adică $r_\sigma(f) < r$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

SPAȚII HILBERTIENE

§ 1. DEFINIȚII. TEOREMA DE EXISTENȚĂ A PROIECȚIILOR

5.1.1. Fie H un spațiu vectorial complex.
Să presupunem că este definită o aplicație

$$(x, y) : H \times H \to C,$$

numită *produs interior* (sau „scalar") al elementelor x, y, cu următoarele proprietăți:

a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

b) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, pentru orice $\lambda \in C$;

d) $(x, x) \geqq 0$; $(x, x) = 0$, dacă și numai dacă $x = 0_H$.

Condiția *d*) are sens, deoarece din *a*) rezultă că (x, x) este real.

Teoremă. *Într-un spațiu vectorial H în care sînt îndeplinite condițiile a), b) c), d), funcția*

$$x \to \sqrt{(x, x)}$$

este o normă.

Să observăm, în primul rînd, că din condițiile *a*), *b*), *c*) rezultă imediat

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2),$$

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y).$$

Lăsăm cititorului stabilirea acestor relații, cu exercițiu.

Să punem, anticipativ

$$\sqrt{(x,\ x)} = \|x\|.$$

Avem $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $(x,\ x) = 0$, deci dacă și numai dacă $x = 0_H$.

Apoi

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x,\ \lambda x)} = \sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda}(x,\ x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x,\ x)} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Pentru stabilirea inegalității triunghiului vom observa că avem oricare ar fi $\lambda \in C$,

$$\|x + \lambda y\| \geqq 0,$$

adică

$$(x + \lambda y,\ x + \lambda y) \geqq 0,$$

ceea ce se mai poate scrie

$$\|x\|^2 + \lambda(y,\ x) + \overline{\lambda}(x,\ y) + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2 \geqq 0.$$

Să luăm

$$\lambda = -\frac{(x,\ y)}{\|y\|^2}.$$

Deducem

$$|(x,\ y)| \leqq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Această inegalitate extinde cunoscuta inegalitate a lui Schwarz. În baza acesteia putem scrie acum

$$\|x + y\|^2 = (x + y,\ x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y,\ x) + \|y\|^2 \leqq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

și teorema este demonstrată.

Un spațiu vectorial H în care s-a introdus un produs interior (x, y) cu proprietățile *a*), *b*), *c*), *d*), normat prin relația $\|x\| = \sqrt{(x,\ x)}$, se numește un *spațiu prehilbertian*. Dacă acest spațiu este complet (adică un spațiu al lui Banach), el se numește un spațiu al lui Hilbert, sau un spațiu *hilbertian*.

Exerciții: 1° Să se arate că $(x,\ y)$ este o funcție continuă pe spațiul $H \times H$, cu norma $\|\{x,\ y\}\| = \|x\| + \|y\|$.

R: În adevăr,

$$(x + h,\ y + k) = (x,\ y) + (h,\ y) + (x,\ k) + (h,\ k).$$

Se va aplica inegalitatea lui Schwarz în membrul al doilea.

2° Să se arate că pentru orice pereche x, y de puncte ale unui spațiu prehilbertian avem (legea paralelogramului)

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

5.1.2. Să presupunem că în produsul interior (x, y) fixăm unul din puncte, de pildă pe y, și să punem $f(x)=(x, y)$. Aplicația $f:H\to C$ definită de egalitatea precedentă este liniară și continuă.

În adevăr,

$$f(\alpha x)=(\alpha x, y)=\alpha(x, y)=\alpha f(x),$$

$$f(x_1+x_2)=(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)=f(x_1)+f(x_2).$$

În sfîrșit, aplicînd inegalitatea lui Schwarz, avem

$$|f(x)|=|(x, y)|\leqq\|y\|\cdot\|x\|,$$

deci f este mărginită.

M. Fréchet și F. Riesz au arătat, independent unul de altul, că oricărei funcționale liniare și mărginite $f(x)$ îi corespunde un produs interior (x, y_f) și unul singur, astfel încît $f(x)=(x, y_f)$.

Vom demonstra mai jos această importantă teoremă de reprezentare. Formularea anticipată a acestei teoreme va constitui pentru noi numai justificarea noțiunii de ortogonalitate, în acord cu noțiunea dată anterior în cazul general (**4.2.2.**, ex. 2°).

Vom spune că două elemente (pe care le putem gîndi, în tot cursul acestui alineat și al celui următor, ca vectori), x, y ale spațiului prehilbertian H sînt *ortogonale* și vom scrie $x\perp y$ dacă $(x, y)=0$.

Dacă $(x, a)=0$ pentru orice $a\in E\subseteq H$, vom spune că x este ortogonal mulțimii E. În scris: $x\perp E$.

Proprietatea următoare ne va fi foarte utilă, în afară de interesul ei intrinsec.

Teoremă: *O mulțime convexă și închisă F a unui spațiu hilbertian*[1] *H conține un element cu cea mai mică normă.*

Să punem $\delta=\inf\{\|x\|:x\in F\}$ și să considerăm un șir de puncte $\{x_n\}_{n\in N}\subset F$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\delta$. Putem, evident, să alegem șirul $\{\|x_n\|\}_{n\in N}$ descrescător. Din $x_n\in F$, $x_m\in F$, deducem $\frac{1}{2}(x_n+x_m)\in F$, deci $\|x_n+x_m\|\geqq 2\delta$.

[1] Condiția de *completitudine* a spațiului H este aici esențială.

În baza legii paralelogramului putem scrie

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \leqq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 2\delta,$$

deci șirul $\{x_n\}_{n\in N}$ este fundamental. Spațiul H fiind complet, acest șir este convergent. Fie $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Din egalitatea $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta$ deducem $\|x_0\| = \delta$; teorema este demonstrată.

5.1.3. Am văzut mai sus (§ 7) că *dacă* un spațiu X al lui Banach se poate descompune în suma directă a două subspații X', X''

$$X = X' \oplus X'', \tag{1}$$

astfel încît orice element $x \in X$ să poată fi descompus sub forma

$$x = x' + x'',$$

cu $x' \in X'$, $x'' \in X''$ atunci:

1° descompunerea precedentă este unică;

2° există o *proiecție* $x \to x'$, a spațiului X pe subspațiul X'.

Pentru un spațiu hilbertian, o descompunere de forma (1) este *totdeauna* posibilă, prin urmare într-un spațiu hilbertian există totdeauna proiecții. Aceasta rezultă din următoarea

Teoremă. *Dacă G este un subspațiu al spațiului hilbertian H și $x \in H$, atunci*

$$x = x' + x'',$$

cu $x' \in G$ și $x'' \perp G$. Descompunerea precedentă este unică.

Într-adevăr, dacă $x \in G$, este suficient să luăm $x' = x$ și $x'' = 0_H$. Dacă $x \notin G$, să considerăm mulțimea

$$F = \{z : z = x - y,\ y \in G\}.$$

Este vizibil că F este convexă, deoarece G, ca subspațiu al lui H, este o mulțime convexă. De asemenea, F este închisă, deoarece G este o mulțime închisă.

Teorema din 5.2.1. este deci aplicabilă: există un element $x'' = x - x' \in F$, cu $x' \in G$, având cea mai mică normă. Altfel vorbind, oricare ar fi $\lambda \in C$ și $y \in G$,

$$\|x'' - \lambda y\|^2 \geqq \|x''\|^2,$$

sau

$$-\lambda(y, x'') - \bar{\lambda}(x'', y) + |\lambda|^2\ \|y\|^2 \geqq 0.$$

Dacă luăm în particular,

$$\lambda = \frac{(x'', y)}{\|y\|^2},$$

găsim $|(y, x'')| \leqq 0$, deci $(y, x'') = 0$, adică $x'' \perp G$.

Să arătăm că descompunerea este *unică*. Fie

$$x = x_1' + x_1'', \text{ cu } x_1' \neq x', \; x_1'' \neq x'', \; x_1' \in G,$$

$x_1'' \perp G$. Deducem

$$x' - x_1' = x_1'' - x''.$$

Dar $x' - x_1' \in G$, $x_1'' - x'' \perp G$, deci

$$(x' - x_1', \; x_1'' - x'') = 0,$$

adică

$$(x' - x_1', \; x' - x_1') = \|x' - x_1\|^2 = 0,$$

de unde $x_1' = x'$ și $x_1'' = x''$, ceea ce contrazice ipotezele făcute.

Corolarii: 1° *Oricărui subspațiu G al lui H îi corespunde o proiecție $p : H \to G$.*

2° *Dacă $G \subseteq H$ este un subspațiu al lui H, există cel puțin un vector $x'' \in H$, astfel încît: $x'' \neq 0_H$, $x'' \perp G$.*

3° *Dacă G este un subspațiu propriu al lui $H (G \subseteq H)$, există un alt subspațiu $K \subseteq H$, astfel încît*

$$H = G \oplus K.$$

În adevăr, fie K mulțimea elementelor $x'' \perp G$. K nu este mulțimea vidă. În al doilea rînd, K este o varietate lineară a lui H. În al treilea rînd, să considerăm un element $y \in K'$ (punct de acumulare al mulțimii K).

În bula $B\left(y; \frac{1}{n}\right)$ se găsește un element $x_n'' \in K$, adică un element pentru care

$$(x', x_n'') = 0,$$

oricare ar fi $x' \in G$. Să fixăm pe x'. Pentru $n \to \infty$ avem (5.1.1., ex. 1°)

$$\lim (x', x_n'') = (x', y) = 0,$$

deci $y \perp x'$. Cum x' este arbitrar în G, avem $y \perp G$, deci $y \in K$ și K este un subspațiu.

În sfîrșit G și K au un singur element în comun: punctul O_H.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. REPREZENTAREA FUNCŢIONALELOR LINEARE CONTINUE

5.2.1. Sîntem, acum, în măsură să stabilim

Teorema de reprezentare a funcţionalelor liniare şi mărginite (M. Fréchet, F. Riesz). *Oricărei funcţionale lineare şi mărginite definite în spaţiul hilbertian H îi corespunde un element $y_f \in H$, astfel încît să avem $f(x) = (x, y_f)$ pentru orice $x \in H$.*

Să punem $K = \{x : f(x) = 0\}$. Este vizibil că mulţimea astfel definită este un subspaţiu al lui H. Dacă $K = H$, atunci $f(x) = (x, y_f)$, cu $y_f = O_H$. Să presupunem deci $K \subset H$. Atunci (5.1.3.) există cel puţin un element $z \neq O_H$, astfel încît $z \perp K$. Vom arăta că vom putea determina un număr real α astfel încît să avem $y_f = \alpha z$.

Vom observa, în primul rînd, că dacă $x \in K$, atunci $f(x) = 0 = (x, \alpha z)$, *oricare ar fi* α.

În al doilea rînd, în identitatea

$$x = (x - \beta z) + \beta z$$

vom determina pe β astfel încît să avem $x - \beta z \in K$.

Pentru aceasta este necesar şi suficient să avem

$$f(x - \beta z) = 0,$$

de unde, ţinînd seama că $z \notin K$,

$$\beta = \frac{f(x)}{f(z)}.$$

Cu această valoare a lui β vom avea

$$f(x) = f(x - \beta z) + f(\beta z) = (x - \beta z, y_f) + f(\beta z).$$

Dacă vom reuşi să arătăm că $f(\beta z) = (\beta z, y_f)$, teorema este demonstrată. Dar

$$(\beta z, y_f) = (\beta z, \alpha z) = \beta \cdot \overline{\alpha} \|z\|^2.$$

Obţinem astfel ecuaţia în α

$$f(\beta z) = \beta \cdot \overline{\alpha} \| z \|^2,$$

de unde

$$\alpha = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar α este determinat şi teorema de reprezentare este demonstrată.

Ca o consecinţă imediată a teoremei de reprezentare obţinem următoarea

Teoremă: *Dacă H este un spaţiu hilbertian, atunci avem, în afară de un homeomorfism izometric, $H = H^*$.*

În adevăr, în baza teoremei precedente, fiecărei funcţionale continue f pe H îi corespunde un element $y \in H$ astfel încît $f(x) = (x, y)$. Reciproc, fiecărei element $y \in H$ îi corespunde funcţionala lineară $f(x) = (x, y)$, care este continuă, deoarece

$$|f(x)| = |(x, y)| \leqq \|y\| \cdot \|x\|,$$

de unde $\|f\| \leqq \|y\|$. Cum $f(y) = \|y\|^2$, rezultă că $\|f\| = \|y\|$. Deci bijecţia $y \to f(x)$ este o izometrie între H şi H^*, deci un homeomorfism.

§ 3. MULŢIMI ORTONORMATE

5.3.1. O mulţime finită

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

de elemente ale spaţiului H este, prin definiţie, *ortonormală* dacă

$$(x_i, x_k) = \delta_{i,k}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

unde $\delta_{i,k} = 1$ dacă $i = k$, şi $\delta_{i,i} = 1$. Altfel spus, mulţimea considerată este ortonormală dacă toate elementele au norma egală cu 1 şi sînt ortogonale două cîte două.

Fie $x \in H$, altfel arbitrar. Numerele

$$c_i = (x, x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

se numesc *coeficienţii lui Fourier* ai elementului x în raport cu mulţimea ortonormală considerată.

Teoremă. *Dacă $\{c_i\}_{i \leqq n}$ sînt coeficienţii lui Fourier ai elementului x în raport cu mulţimea ortonormată $\{x_i\}_{i \leqq n}$, atunci*

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \leqq \|x\|^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, avem

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,\ x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \left(x, \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i,\ x \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.$$

Observaţie: Inegalitatea precedentă se numeşte, convenţional, *inegalitatea lui Bessel.*

5.3.2. Consideraţiile precedente se extind la o mulţime oarecare de elemente din H.

O mulţime $\{x_i\}_{i \in I}$ unde $x_i \in H$ este, prin definiţie, *ortonormată* dacă elementele acestei mulţimi au norma egală cu 1 şi sînt două cîte două ortogonale

O mulţime ortonormată E de elemente din H este *completă* sau *maximală* (sau încă : formează o *bază* pentru H[1]) dacă nu există nici o mulţime ortonormată F, astfel încît $E \subset F$.

Teoremă. *Fiind dată o mulţime ortonormată E, există o mulţime ortonormată completă F care conţine mulţimea E.*

Enunţul implică faptul că E nu este maximală. Există deci cel puţin o mulţime ortonormată $E_1 \supset E$. Să notăm cu $\mathfrak{F}$ famila mulţimilor ortonormate care conţin pe E. În $\mathfrak{F}$ vom introduce relaţia de ordine „$\subseteq$". Să considerăm o subfamilie $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$, total ordonată de această relaţie de ordine:

$$\mathfrak{F}' = \{E_i\}_{i \in I}.$$

Mulţimea

$$G = \bigcup_{i \in I} E_i$$

este ortonormată şi avem evident $G \supseteq E_i$, oricare ar fi $i \in I$. Prin urmare, în baza axiomei lui Zorn, $\mathfrak{F}$ are un element maximal F, care este mulţimea căutată.

5.3.3. Fie $\{x_i\}_{i \in I} = E$ o mulţime ortonormată de elemente din H şi $x \in H$, altfel arbitrar.

Vom pune, ca mai sus,

$$c_i = (x,\ x_i), \qquad i \in I$$

[1] P. Halmos. *Introduction to Hilbert Spaces.* New York, 1951, p. 27.

și vom numi elementele mulțimii numerice $\{c_i\}_{i\in I}$ coeficienții lui Fourier ai elementului x în raport cu mulțimea ortonomată E.

Teorema I. *Oricare ar fi mulțimea ortonormată $E = \{x_i\}_{i\in I}$, coeficienții lui Fourier ai unui element $x \in H$ în raport cu E sînt, în afară de o mulțime cel mult numerabilă, nuli.*

Să punem, ca mai sus,

$$c_i = (x,\ x_i), \qquad i \in I.$$

Putem scrie

$$\{i_i : c_i \neq 0\} = \bigcup_{p\in N} \left\{i\ : |c_i|^2 > \frac{1}{p}\right\}.$$

Fie $\{c_{i_1},\ c_{i_2},\ \ldots,\ c_{i_n}\}$ o submulțime *finită* a lui E, altfel arbitrară. Această submulțime este ortonormată. Inegalitatea lui Bessel este deci aplicabilă

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2 \leqq \|x\|^2.$$

Dacă $|c_{i_k}|^2 > \frac{1}{p}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, atunci neapărat $n \leqq p\,\|x\|^2$, deoarece în caz contrar inegalitatea precedentă nu ar mai avea loc.

Așadar, mulțimea

$$\left\{i : |\,c_i\,|^2 > \frac{1}{p}\right\}$$

este *finită* (numărul elementelor acestei mulțimi este mai mic decît $p\|x\|^2$). De aici rezultă că mulțimea $\{i : c_i \neq 0\}$ este cel mult numerabilă.

Observație. Teorema precedentă ne permite să dăm un sens[1] expresiei $\sum_{i\in I} |c_i|^2$. Într-adevăr, fie $\{c_{i_p}\}_{p\in N}$ partea numerabilă a coeficienților diferiți de zero ai lui Fourier. Prin definiție,

$$\sum_{i\in I} |\,c_i\,|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |\,c_{i_p}\,|^2. \tag{1}$$

Teorema II. *Dacă $\{x_i\}_{i\in I} = E$ este o mulțime ortonormată și $\{c_i\}_{i\in I}$ mulțimea numerică corespunzătoare a coeficienților lui Fourier ai unui element $x \in H$ în raport cu E, atunci*

$$\sum_{i\in I} |\,c_i\,|^2 \leqq \|\,x\,\|^2.$$

[1] Independent de teoria mulțimilor sumabile.

În adevăr, în baza observaţiei precedente,

$$\sum_{i\in I} |c_i|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |c_{i_p}|^2, \quad c_{i_p} \neq 0, \ p = 1, 2, \ldots$$

Să considerăm partea finită (care este ortonormată)

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$$

a lui E, unde n este arbitrar. În baza inegalităţii lui Bessel avem

$$\sum_{p=1}^{n} |c_{i_p}|^2 \leqq \|x\|^2.$$

Pentru $n \to \infty$ obţinem inegalitatea cerută.

Teorema III. *Fie* $\{x_i\}_{i\in I} = E$ *o mulţime ortonormată,* $x \in H$ *altfel arbitrar şi* $c_i = (x, x_i)$.

Seria $\sum_{i\in I} c_i x_i$ *converge către un element* x' *astfel încît* $x - x' \perp E$.

Potrivit unei observaţii anterioare

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = \sum_{p=1}^{\infty} c_{i_p} x_{i_p}.$$

Să punem

$$x_n = \sum_{p=1}^{n} c_{i_p} x_{i_p}.$$

Pentru $m > n$ vom avea

$$\|x_m - x_n\|^2 = \sum_{p=n+1}^{m} |c_{i_p}|^2.$$

Cum seria $\sum_{1}^{\infty} |c_{i_p}|^2$ este convergentă (teorema II), rezultă că putem lua n_0, astfel încît pentru $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$ să avem

$$\|x_m - x_n\|^2 < \varepsilon.$$

Deci $\{x_n\}_{n\in N}$ este un şir fundamental. Spaţiul H fiind complet, acest şir va fi convergent.

Fie

$$x' = \sum_{p=1}^{\infty} c_{i_p} x_{i_p}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$(x_n, x_{i_p}) = c_{i_p},$$

de unde, pentru $n \to \infty$

$$(x', x_{i_p}) = c_{i_p} = (x, x_{i_p}).$$

Rezultă $(x - x', x_{i_p}) = 0$, $p \in N$. Deci $x - x'$ este ortogonală pe submulțimea cel mult numerabilă a mulțimii E pentru care coeficienții lui Fourier corespunzători sînt diferiți de zero.

Fie, acum, $x_i \in E$, astfel încît $c_i = 0$.

Vom avea $(x', x_i) = 0$, iar, pe de altă parte, $(x, x_i) = 0$, de unde $(x - x', x_i) = 0$, deci $x - x' \perp E$.

Exerciții: 1° Se consideră spațiul l_2 din **3.1.2.** Să se arate că în acest spațiu x se poate introduce un produs interior prin egalitatea

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

R: Să observăm că $x_n y_n = \frac{1}{2}[(x_n + y_n)^2 - x_n^2 - y_n^2]$.

2° Este spațiul l_2 un spațiu hilbertian?

3° În spațiul l_2 se consideră șirul $(x^n)_{n \in N}$, unde

$$x^1 = (1, 0, 0, \ldots),$$

$$x^2 = (0, 1, 0, \ldots).$$

Să se verifice că acest șir formează o mulțime ortonormată în l_2. Este această mulțime ortonormată maximală în l_2?

4° Fie $\{x_i\}_{i \in I} = E$ o mulțime ortonormată a spațiului hilbertian H și H_0 varietatea liniară închisă generată de E (intersecția tuturor subspațiilor lui H care conțin pe E). Dacă $H_0 \subset H$, atunci există un element $y \in H$, de normă egală cu 1, astfel încît $y \perp E$.

R: În baza ex. 3° din **4.3.2.** există o funcțională liniară și continuă f, nu identic nulă, care să fie nulă în orice punct din H_0.

După teorema lui Fréchet-Riesz, $f(x) = (x, y)$, unde y depinde de f. Putem lua $\|f\| = 1$, de unde $\|y\| = 1$.

Așadar $x \in H_0$ implică $(x, y) = 0$, de unde $y \perp H_0$.

5.3.4. Vom da acum cîteva proprietăți echivalente cu faptul că o mulțime ortonormată este completă.

Teorema 1. *O mulțime $\{x_i\}_{i \in I} = E$ ortonormată este completă dacă și numai dacă $x \perp E$ implică $x = O_H$.*

Dacă E este completă, $x \perp E$ și $x \neq 0_H$, putem, înlocuind pe x prin αx, să presupunem $\|x\| = 1$. Atunci mulțimea

$$F = \{x\} \cup E$$

ar fi ortonormată și E nu ar fi maximală.

Dacă $x \perp E$ implică $x = 0_H$, presupunînd că E nu este completă, există o mulțime ortonormată $F \supset E$, deci un element $x \neq 0_H$ (în fapt $x \in F - E$), astfel încît $x \perp E$, ceea ce contrazice ipoteza.

Teorema II. *O mulțime $\{x_i\}_{i \in I} = E$ ortonormată este completă dacă și numai dacă subspațiul H_0 generat de E coincide cu H.*

Dacă E este completă, atunci $H_0 = H$, în baza ex. 4° din **5.3.3.**

Dacă $H_0 = H$ și E nu este completă, există o mulțime $F \supset E$, ortonormată maximală.

Fie $y \in F - E$. Evident, $\|y\| = 1$. Pe de altă parte, $y \in H = H_0$, deci y este punct de acumulare de combinații finite de elemente din E. Fie $\{z_n\}_{n \in N}$ un șir de astfel de combinații care tinde către y. Avem, evident, $(z_n, y) = 0$, de unde, pentru $n \to \infty$,

$$(y, y) = 0,$$

adică $\|y\| = 0$, ceea ce contrazice o ipoteză anterioară. Așadar E este completă.

Teorema III. *O mulțime ortonormată $\{x_i\}_{i \in I} = E$ este completă dacă și numai dacă pentru orice element $x \in H$ avem*

$$x = \sum_{i \in I} (x, x_i) x_i. \tag{1}$$

În adevăr, dacă E este completă, atunci, în baza teoremei II, $H_0 = H$.

Pe de altă parte (**5.3.3**, teorema III), seria $\sum_{i \in I} c_i x_i$, unde $c_i = (x, x_i)$, este convergentă către un element x', astfel încît $x - x' \perp E$, de unde $x - x' \perp H_0 = H$. În particular, $(x - x', x - x') = 0$, deci $x' = x$.

Reciproc, să presupunem că pentru orice $x \in H$ avem

$$x = \sum_{i \in I} c_i x_i.$$

În baza teoremei citate mai sus, $x \perp E$.

Dacă E nu ar fi completă, atunci $H_0 \subset H$ (H_0 fiind subspațiul generat de E). Deci (**5.3.3.**, ex. 40) ar exista un element $x \in H$, de normă egală cu 1, astfel încît $(x, x_i) = 0$, $i \in I$. Dar atunci, din

$$x = \sum_{i \in I} c_i x_i$$

am deduce $x = 0_H$. Deci E este completă.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Formula $x = \sum_{i \in I} c_i x_i$ constituie, prin definiție, desăşurarea în *serie Fourier* a elementului x, după elementele mulțimii ortonormate E. Teorema precedentă afirmă că o astfel de desfăşurare este posibilă dacă şi numai dacă E este maximală.

Exerciții: 1° Mulțimea ortonormată $E = \{x_i\}_{i \in I}$ este completă dacă şi numai dacă pentru orice pereche $x \in H$, $y \in H$ avem

$$(x, y) = \sum_{i \in I} (x, x_i)\ \overline{(y, y_i)}.$$

(Identitatea lui Parseval.)

R: Ştim că

$$x = \sum_{i \in I} (x, x_i)\ x_i, \quad y = \sum_{i \in I} (y, x_i) x_i.$$

Să notăm cu I' mulțimea indicilor i pentru care $(x, x_i) \neq 0$, cu I'' mulțimea indicilor i pentru care $(y, x_i) \neq 0$. Aceste mulțimi sînt cel mai numerabile, deci $I' \cup I''$ este cel mult numerabilă.

Fie $I' \cup I'' = \{i_p\}_{p \in N}$. Vom avea

$$x = \sum_{p=1}^{\infty} (x, x_{i_p})\, x_{i_p}, \quad y = \sum_{p=1}^{\infty} (y, x_{i_p})\, x_{i_p}.$$

Să punem

$$x_n = \sum_{p=1}^{n} (x, x_{i_p})\, x_{i_p}, \quad y_n = \sum_{p=1}^{n} (y, x_{i_p})\, x_{i_p}.$$

Avem

$$(x_n, y_n) = \left(\sum_{p=1}^{n} (x, x_{i_p})\, x_{i_p}, \quad \sum_{p=1}^{n} (y, x_{i_p})\, x_{i_p} = \sum_{p=1}^{n} (x, x_{i_p}) \overline{(y, x_{i_p})} \right).$$

Pentru $n \to \infty$ obținem identitatea lui Parseval.

Reciproc, să presupunem că această identitate are loc pentru orice pereche x, y de puncte din H. Deducem, pentru un element $x \in H$ *altfel arbitrar*,

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, x_i)|^2.$$

Dacă E nu ar fi completă, ar exista un vector x, de normă 1, ortogonal lui E. Pentru un astfel de vector, identitatea precedentă nu ar mai avea loc.

Scanned with OKEN Scanner

2° O mulțime ortonormată $E = \{x_i\}_{i \in I}$ este completă dacă și numai dacă pentru orice element $x \in H$ avem

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, x_i)|^2.$$

R: Dacă E este completă, atunci are loc identitatea lui Parseval, de unde se deduce, ca în ex. precedent, identitatea cerută. Reciproc, dacă egalitatea precedentă are loc, E este completă, așa cum s-a arătat în ex. precedent.

3° Toate mulțimile ortonormate complete ale unui spațiu hilbertian au același cardinal.

R: Fie $E = \{x_i\}_{i \in I}$, $F = \{y_k\}_{k \in K}$ ortonormate maximale. Pentru un indice $i \in I$ fix, mulțimea indicilor $k \in K$, pentru care $(x_i, y_k) \neq 0$ este cel mult numerabilă. Fie K_i această mulțime. Un element y_k nu poate fi ortogonal lui E, deoarece E este maximală.

Deci $K \subseteq \bigcup_{i \in I} K_i$, de unde, punînd $\mathfrak{a} = \operatorname{card} E$, $\mathfrak{b} = \operatorname{card} F$,

$$\mathfrak{b} \leqq \aleph_0 \mathfrak{a}.$$

Prin simetrie, $\mathfrak{a} \leqq \aleph_0 \mathfrak{b}$, de unde $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Observație: Cardinalul tuturor mulțimilor ortonormate complete ale unui spațiu hilbertian se numește *dimensiunea* acestui spațiu.

4° Să se arate că, în cazul unui spațiu hilbertian H, adjuncta f^* a unei aplicații lineare și mărginite $x \to f(x)$ este definită de ecuația

$$(f(x), y) = (x, f^*(y)).$$

R: În cazul unei aplicații $f: X \to Y$ adjuncta $f^*: Y^* \to X^*$ este definită (**4.4.2**, ex. 5°) după cum se știe, de ecuația

$$(f^* \circ y^*)(x) = y^*(f(x)), \quad (y^* \in Y^*).$$

În cazul de față, $X' = Y = X^* = Y^* = H$, iar y^* este o funcțională liniară și continuă pe H. Suprimînd asteriscul și utilizînd homeomorfismul izometric $y \leftrightarrow (*, y)$, membrul al doilea al relației precedente se scrie $(f(x), y)$. Să observăm că $f^* \circ y = f^*(y)$ este o funcțională liniară și continuă. Putem și aici utiliza izometria $f^* \circ y \leftrightarrow (*, f^*(y))$, deci membrul întîi se scrie $(x, f^*(x))$, de unde relația cerută.

Observație: Toate proprietățile aplicațiilor adjuncte (4.4.2, exercițiile 5° și 6°) sînt valabile în acest caz. În particular,

$$\|f^*\| = \|f\|, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

5° Să se arate că adjuncta unei aplicații

$f: H \to H$ lineare și continue este închisă.

R: Fie $y_n \in H$, $\lim y_n = y$, $\lim f^*(y_n) = f_0$.

Avem, pentru orice $x \in H$ și pentru orice n natural

$$(f(x), y_n) = (x, f^*(y_n)),$$

de unde, pentru $n \to \infty$

$$(f(x), y_0) = (x, f_0),$$

deci $f_0 = f^*(y_0)$.

§ 4. OPERATORI ADJUNCȚI. OPERATORI AUTOADJUNCȚI

5.4.1. Noțiunea de aplicație adjunctă, dată în **4.3.2** și aplicată în exercițiile precedente la spațiile hilbertiene, poate fi prezentată, în cazul acestor spații, sub o formă mai generală.

Pentru simplificarea expunerii, vom adopta aici termenul de *operator* pentru orice aplicație liniară (nu neapărat și mărginită!) a unui spațiu hilbertian H în el însuși. Vom păstra denumirea de operator chiar pentru o aplicație liniară $f: D \to H$, unde D este o varietate liniară a lui H. În cele ce urmează vom presupune *totdeauna* că $\overline{D} = H$.

Să considerăm un operator $f: D \to H$. Mulțimea elementelor $y \in H$ cărora le corespunde un element $g(y) \in H$, astfel încît să avem

$$(f(x), y) = (x, g(y)), \tag{1}$$

va fi notată D^*. Această mulțime nu este vidă, deoarece $0_H \in D^*$. În cele ce urmează ne vom ocupa exclusiv de operatori f pentru care $D^* \neq \{0_H\}$.

Vom arăta, în primul rînd, că pentru orice $y \in D^*$ corespunde un singur $g(y)$. Să presupunem, în adevăr, că alături de (1), am avea

$$(f(x), y) = (x, g'(y)). \tag{1'}$$

Am deduce $g'(y) - g(y) \perp x$, oricare ar fi $x \in D$, deci $g'(y) - g(y) \perp D$. Cum $\overline{D} = H$, deducem, din continuitatea produsului interior, $g'(y) - g(y) \perp H$. În particular $g'(y) - g(y) \perp g'(y) - g(y)$, de unde $g'(y) = g(y)$.

Aplicația $g: D^* \to H$, unic determinată de relația (1), se numește *operatorul adjunct lui* f și se notează f^*. Egalitatea prin care se definește adjunctul unui operator f este, așadar,

$$(f(x), y) = (x, f^*(y)). \tag{2}$$

Mulțimea D^* este o varietate liniară (demonstrație!), dar nu este neapărat densă în H.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă D^* este densă în H, atunci f^* are un adjunct, pe care îl vom nota f^{**}. Fie $f^{**}: D^{**} \to H$. Din relația (2) deducem

$$(f^*(y), x) = (y, f(x)).$$

De aici rezultă că $D^{**} \supseteq D$ și că f este restricția la D a lui f^{**}.

Dacă f este un operator *mărginit* și $D = H$, atunci adjunctul său f^* este mărginit și definit pe H, iar $f^{**} = f$.

5.4.2. Teorema I. *Adjunctul unui operator linear $f: D \to H$ este un operator linear închis.*

Linearitatea rezultă imediat din (2). Să arătăm că $f^*: D^* \to H$ este închis. Fie $\{y_n\}_{n \in N}$, cu $y_n \in D^*$ și $\lim y_n = y$. Să presupunem că $\lim f(y_n) = f^*$. Din egalitatea

$$f(x), y_n) = (x, f^*(y_n)),$$

valabilă pentru orice n, deducem, ținînd seama de continuitatea produsului interior,

$$(f(x), y) = (x, f^*),$$

deci $y \in D^*$ și $f^* = f^*(y)$.

Vom spune că un operator $f: D \to H$, cu $\overline{D} = H$, este *autoadjunct* dacă $D^* = D$ și dacă $f(x) = f^*(x)$ pentru orice $x \in D$.

Cu această definiție putem enunța

Teorema II (Hellinger-Toeplitz). *Un operator autoadjunct f definit pe tot spațiul H este mărginit.*

În adevăr, deoarece $f = f^*$, f este închis (teorema I). Cum f este definit pe tot spațiul, rezultă că f este mărginit (**4.5.2.**, teorema II).

5.4.3. În cazul unui operator $f: D \to H$ vom păstra, pentru mulțimea rezolvantă și pentru spectrul lui f, pe care le vom nota respectiv tot cu $\rho(f)$ și $\sigma(f)$, aceleași definiții pe care le-am dat în capitolul IV, § 7 (**4.7.1.**) pentru un operator *mărginit* definit pe un spațiu X al lui Banach. Demonstrațiile date pentru obținerea unor proprietăți ale mulțimilor $\rho(f)$ și $\sigma(f)$ în cazul unui spațiu al lui Banach, care se bazau în mod esențial pe faptul că f era un operator *mărginit*, nu mai sînt valabile în cazul considerat aici.

În cazul unui operator autoadjunct se poate totuși obține un rezultat precis:

Teoremă. *Mulțimea rezolvantă a unui operator autoadjunct nu este vidă. Pentru orice ζ complex, operatorul*

$$R_\zeta = (\zeta I - F)^{-1}$$

este definit pe tot spațiul H și este mărginit.

Scanned with OKEN Scanner

Fie, în adevăr, $f: D \to H$ autoadjunct.

Să punem

$$(\zeta I - f)(y) = x. \qquad (y \in D)$$

Vom calcula produsul interior

$$\|x\|^2 = ((\zeta I - f)(y), (\zeta I - f)(y)).$$

Avem

$$\|x\|^2 = ((\xi I - f + i\eta I)(y), (\xi I - f + i\eta I)(y)) =$$
$$= \|(\xi I - f)(y)\|^2 + \eta^2 \cdot \|y\|^2 + ((\xi I - f)(y), i\eta y) + (i\eta y, (\xi I - f)(y)).$$

Dar

$$((\xi I - f)(y), i\eta y) = (\xi y, i\eta y) - (f(y), i\eta y) =$$
$$= -i\xi\eta(y, y) - (y, f^*(i\eta y)) =$$
$$= -i\eta(y, \xi y) + i\eta(y, f(y)) = -(i\eta y, \xi y) + (i\eta y, f(y)) =$$
$$= (i\eta y, (\xi I - f)(y)).$$

Deci, în definitiv,

$$\|x\|^2 = \|(\zeta I - f)(y)\|^2 + \eta^2 \|y\|^2. \tag{1}$$

Din această importantă egalitate rezultă că

$x = 0_H$ dacă şi numai dacă $y = 0_H$. Deci $\zeta I - f$ este o injecţie, de unde rezultă că $R = (\zeta I - f)^{-1}$ există.

Să punem $(\zeta I - f)(D) = H_0$. Vom arăta că $H_0 = H$, de unde va rezulta că R_ζ este definită pe tot spaţiul. Vom împărţi demonstraţia în două părţi:

a) $\overline{H}_0 = H$. Fie, în adevăr, $z \perp H_0$.

Aceasta înseamnă că pentru orice $y \in D$ avem

$$((\zeta I - f)(y), z) = 0$$

sau

$$(f(y), z) = (\zeta y, z) = \zeta(y, z) = (y, \overline{\zeta} z),$$

deci $z \in D^*$ şi $f^*(z) = \overline{\zeta} z$. Dar f este autoadjunct. Deci $f(z) = \overline{\zeta} z$.

Deducem

$$(f(z), z) = (z, f(z)) = \overline{\zeta}(z, z) = \zeta(z, z).$$

Cum ζ este complex, deci $\eta \neq 0$, rezultă că $\zeta \neq \overline{\zeta}$, deci $\|z\|^2 = 0$, de unde $z = 0_H$. Aşadar $\overline{H}_0 = H$.

b) $H_0 = H$. Din *a*) rezultă că orice element $x \in H$ este limita unui șir $\{x_n\}_{n \in N}$ de elemente din H_0. Fie $y_n = R_\zeta(x_n)$, de unde $(\lambda I - f)(y_n) = x_n$.

Vom avea, repetînd un calcul făcut mai sus,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|(\zeta I - f)(y_n - y_m)\|^2 + \eta^2 \|y_n - y_m\|^2 \geqq \eta^2 \|y - y\|^2.$$

Cum $\eta \neq 0$, aceasta înseamnă că $\{y_n\}_{n \in N}$ este un șir fundamental, deci convergent. Fie $y = \lim_{n \to \infty} y_n$.

Cum f este un operator închis, $y \in D$ și $(\zeta I - f)(y) = x$. Deci pentru orice $x \in H$ corespunde un $y \in H$, astfel încît egalitatea precedentă să fie verificată, ceea ce revine la a spune că $H_0 = H$. Faptul că R_ζ este mărginită rezultă din (1).

În adevăr, din egalitatea citată deducem

$$\|x\|^2 \geqq \eta^2 \|y\|^2,$$

de unde

$$\|y\|^2 \leqq \frac{1}{\eta^2} \|x\|^2$$

sau

$$\|R_\zeta(x)\| \leqq \frac{1}{|\eta|} \cdot \|x\|,$$

deci

$$\|R_\zeta\| \leqq \frac{1}{|\eta|}.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată. Dacă notăm, ca de obicei, cu C mulțimea numerelor complexe, atunci $\rho(f) \supseteq C - R$.

Observație importantă: Din teorema demonstrată rezultă că spectrul unui operator autoadjunct este *real*.

5.4.4. Se pot obține informații mai bogate asupra operatorilor autoadjuncți, dacă presupunem că aceștia sînt *mărginiți* și definiți pe tot spațiul H. Vom presupune, de acum înainte, îndeplinite aceste două condiții. Dar, mai întîi, o definiție:

Vom spune că un operator $f: H \to H$ mărginit este *pozitiv* și vom scrie $f \geqq 0$ dacă pentru orice $x \in H$ avem

$$(f(x), x) \geqq 0.$$

Vom spune că $f \geqq g$ dacă $f - g \geqq 0$.

Exerciții: 1° Dacă $f \geqq 0$ și $\alpha \geqq 0$, atunci $\alpha f \geqq 0$.

2° Dacă $f \geqq 0$ și $g \geqq 0$, atunci $f + g \geqq 0$.

3° Dacă $f \geqq g$ și $g \geqq h$, atunci $f \geqq h$.

5.4.5. Teorema I. *Dacă operatorul f, mărginit și autoadjunct este pozitiv, atunci spectrul său este pozitiv*[1].

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe următoarea

Lemă: *Fie g un operator mărginit, autoadjunct. Dacă există un scalar strict pozitiv α, astfel încît să avem $g \geqq \alpha I$, atunci g^{-1} există și avem $\|g^{-1}\| \leqq \frac{1}{\alpha}$.*

În adevăr avem, pentru orice $x \in H$,

$$\alpha\|x\|^2 = (\alpha x, x) \leqq (g(x), x) \leqq \|g(x)\| \cdot \|x\|,$$

deci

$$\|g(x)\| \geqq \alpha\|x\|.$$

De aici rezultă că $g(x) = O_H$ dacă și numai dacă $x = O_H$. Prin urmare g^{-1} există pe varietatea lineară $H_0 = g(H)$. În plus, avem $\|g^{-1}\|_{H_0} \leqq \frac{1}{\alpha}$.

Vom arăta că $H_0 = H$. Ca și într-o propoziție anterioară, vom proceda în două etape:

a) $\overline{H}_0 = H$. În adevăr, fie y ortogonal lui H_0. Aceasta înseamnă că $(f(x), y) = 0$, pentru orice $x \in H$ sau $(x, f(y)) = 0$, pentru orice $x \in H$, de unde, în particular, $\|f(y)\|^2 = 0$, deci $f(y) = O_H$. Așadar $y = O_H$ și $\overline{H}_0 = H$.

b) Deoarece $\overline{H}_0 = H$, pentru orice $y \in H$ există un șir $\{x_n\}$ astfel încît să avem $\lim g(x_n) = y$. Avem

$$\|g(x_{n+p}) - g(x_n)\| = \|g(x_{n+p} - x_n)\| \geqq \alpha\|x_{n+p} - x_n\|,$$

deci șirul $\{x_n\}$ este fundamental. Spațiul H fiind complet, acest șir are o limită x și avem, din cauza continuității lui g, $g(x) = y$, deci $g(H) = H_0 = H$.

Să trecem acum la demonstrarea teoremei. Vom pune $I + f = g$, unde α este un scalar strict pozitiv. Din $f \geqq 0$ deducem $\alpha I + f \geqq \alpha I$, deci — în baza lemei demonstrate $(\alpha I + f)^{-1}$ există și este definită pe întregul spațiu H. Deci $(-\alpha I - f)^{-1}$ există, de asemenea, și este definită pe H. Rezultă de aici că orice număr strict negativ aparține mulțimii rezolvante. Știm deja (**5.4.2.**) că orice număr complex $\zeta = \xi + i\eta$ cu $\eta \neq 0$ aparține acestei mulțimi. Prin urmare $\sigma(f) \subseteq [0, \infty)$.

Teorema II. *Dacă f este un operator mărginit autoadjunct, există un scalar strict pozitiv α astfel încît să avem*

$$-\alpha I \leqq f \leqq \alpha I.$$

[1] Adică: $\sigma(f) \subseteq [0, \infty)$.

Vom lua $0 < \alpha \leqq \|f\|$ și vom pune $g = \frac{1}{\alpha} f$. Atunci $\|g\| \leqq 1$. Avem

$$(g(x), x) \leqq \|g(x)\| \cdot \|x\| \leqq \|g\| \cdot \|x\|^2,$$

de unde

$$((I - g)(x), x) = (x, x) - (g(x), x) \geqq \|x\|^2 - \|g\| \cdot \|x\|^2 > 0,$$

deci $I - g \geqq 0$.

La fel se arată că $I + g \geqq 0$ (ținînd seama că $\|g\| \leqq 1$). Așadar

$$-I \leqq g \leqq I,$$

de unde

$$-\alpha I \leqq f \leqq +\alpha I.$$

Exerciții: 1° Oricărui operator mărginit $f: H \to H$ îi corespunde în mod unic o pereche ordonată (g, h) de operatori mărginiți autoadjuncți, astfel încît să avem

$$f = g + ih.$$

R: $g = \frac{1}{2}(f + f^*)$, $h = \frac{1}{2i}(f - f^*)$. Dacă $f = g + ih$ și $f = g' + ih'$, cu g, h, g', h' autoadjuncți, atunci $g - g' = i(h' - h)$. Dar $(g - g')^* = g - g'$ $(i(h' - h))^* = -i(h' - h)$, deci $h' = h$, de unde $g' = g$.

2° Dacă f este un operator mărginit autoadjunct, atunci $\|f^2\| = \|f\|^2$.

R: Este suficient să arătăm că $\|f^2\| \geqq \|f\|^2$. Fie $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar. Din proprietățile normei $\|f\|$ rezultă că există un element $x \in H$, cu $\|x\| = 1$, astfel încît $\|f(x)\| > \|f\| \cdot \|x\| - \varepsilon = \|f\| - \varepsilon$, de unde $(\|f\| - \varepsilon)^2 \leqq \|f(x)\|^2 = (f(x), f(x)) = (x, f^2(x)) \leqq \|f^2(x)\| \cdot \|x\| \leqq \|f^2\| \cdot \|x\|^2 = \|f^2\|$. Cum ε este arbitrar, deducem $\|f\|^2 \leqq \|f^2\|$.
Dar acest șir este un șir constant.

3° Dacă operatorul mărginit f este autoadjunct, atunci f^n este autoadjunct.

R: Avem $(f^2(x), y) = (f(x), f(y) = (x, f^2(y))$. Se va proceda prin recurență.

4° Dacă f este un operator mărginit autoadjunct, atunci $r_\sigma(f) = \|f\|$.

R: Potrivit formulei lui Gelfand, avem $r_\sigma(f) = \lim_{n \to \infty} \|f^n\|^{\frac{1}{n}}$. Dar $\|f\|^2 = \|f^2\|$, de unde $\|f\| = \|f^2\|^{\frac{1}{2}}$. Prin recurență deducem $\|f\| = \|f^m\|^{\frac{1}{m}}$ cu $m = 2^n$. Șirul $\left\{\|f^n\|^{\frac{1}{m}}\right\}$ ca subșir al șirului $\left\{\|f^n\|^{\frac{1}{n}}\right\}$ converge către $r_\sigma(f)$. Dar acest șir este un șir constant.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

FAMILII DE MULȚIMI DE TIP BORELIAN. FUNCȚII ASOCIATE

§ 1. MULȚIMI BORELIENE ÎNTR-UN SPAȚIU METRIC

6.1.1. Fie (X, d) un spațiu metric și $\mathfrak{F}_0$ familia mulțimilor închise ale acestui spațiu.

Să considerăm sistemul $\mathfrak{L}$ al tuturor familiilor $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{F}_0$ cu următoarele proprietăți:

1° Dacă $E \in \mathfrak{B}$ și $F \in \mathfrak{B}$, atunci $E - F \in \mathfrak{B}$.

2° Dacă $E_n \in \mathfrak{B}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ atunci $\bigcup_{n \in N} E_n \in \mathfrak{B}$.

3° $X \in \mathfrak{B}$, oricare ar fi $\mathfrak{B} \in \mathfrak{L}$.

Vom pune

$$\mathfrak{F} = \bigcap \{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{F}_0,\ \mathfrak{B} \in \mathfrak{L}\}.$$

Orice element al familiei $\mathfrak{F}$ se numește o *mulțime boreliană*.

Din condițiile 1° și 3° rezultă că $F \in \mathfrak{F}_0$ implică $F \in \mathfrak{B}$ și $CF \in \mathfrak{B}$ Deci orice mulțime deschisă este boreliană.

Exerciții: 1° Să se arate că dacă E_n, $n = 1, 2, \ldots$, sînt mulțimi boreliene, atunci $\bigcap_{n \in N} E_n$ este o mulțime boreliană.

R: Se va ține seama de condițiile 1°, 3° și de formulele lui De Morgan.

2° Fie $\mathcal{G}_0$ familia mulțimilor deschise ale spațiului metric (X, d) și $\mathfrak{L}'$ sistemul tuturor familiilor $\mathfrak{B}' \supseteq \mathcal{G}_0$ cu proprietățile 1°, 3°, precum și cu proprietatea următoare:

2'° Dacă $E_n \in \mathfrak{B}'$, $n = 1, 2, \ldots$, atunci $\bigcap_{n \in N} E_n \in \mathfrak{B}'$.

Să punem

$$\mathcal{G} = \bigcap \{\mathfrak{B}' : \mathfrak{B}' \supseteq \mathcal{G}_0,\ \mathfrak{B}' \in \mathfrak{L}'\}.$$

Să se arate că $\mathcal{G} = \mathfrak{F}$.

§ 2. CLAN BORELIAN DE MULȚIMI

6.2.1. Condițiile 1°, 2°, 3° din paragraful precedent nu implică în fapt nici o organizare ca spațiu topologic a mulțimii X. Această observație ne va permite să dăm o foarte largă extindere noțiunii de mulțime boreliană.

Să considerăm o mulțime T. Nu vom presupune mulțimea T organizată ca spațiu metric și nici măcar ca spațiu topologic. Totuși, pentru comoditate, ca și pentru păstrarea unui suport intuitiv raționamentelor, vom continua să numim mulțimea T un *spațiu* (netopologizat sau amorf), iar elementele sale vor fi numite, mai departe, pentru aceleași motive, *puncte*.

Vom presupune că $\mathfrak{L}(T)$ are cel puțin o parte $\mathcal{A}$ cu următoarele proprietăți:

I. $E \in \mathcal{A}$ și $F \in \mathcal{A} \Rightarrow E - F \in \mathcal{A}$.

II. $E_n \in \mathcal{A}$ $n = 1, 2, \ldots, \Rightarrow \bigcup_{n \in N} E_n \in \mathcal{A}$.

III. $T \in \mathcal{A}$.

După cum se vede, aceste trei condiții reproduc întocmai condițiile 1°, 2°, 3° din 6.1.1. care (împreună cu condiția de minimalitate, care în cazul acesta nu mai are sens) definesc familia mulțimilor boreliene.

De aceea vom numi *clan borelian* orice familie $\mathcal{A}$ cu proprietățile I, II, III.

Exerciții: 1° Să se arate că orice clan borelian conține mulțimea vidă.

2° Să se arate că dacă $\mathcal{A}$ este un clan borelian și $A \in \mathcal{A}$, atunci $\mathbf{C}A \in \mathcal{A}$.

3° Să se arate că dacă $\mathcal{A}$ este un clan borelian și $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, atunci $\bigcap_{n \in N} A_n \in \mathcal{A}$.

4° Să se arate că orice intersecție de clanuri boreliene este un clan borelian.

5° Să se arate că dacă $\mathcal{A}$ este un clan borelian și $A_n \in \mathcal{A}, n = 1, 2, \ldots$, atunci $\liminf_{n \to \infty} A_n \in \mathcal{A}$, $\limsup_{n \to \infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Scanned with OKEN Scanner

6.2.2. Fie T un spațiu (netopologizat) și $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(T)$.

Fie, de asemenea, $\mathfrak{A}$ sistemul tuturor clanurilor boreliene $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{E}$. Vom pune

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A};\ \mathcal{A} \supseteq \mathcal{E},\ \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}.$$

Este evident (exercițiul 4° din paragraful precedent) că $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ este un clan borelian. De asemenea, este evident, din definiția lui $\mathcal{A}(\mathcal{E})$, că

$$\mathcal{A} \supseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{E}).$$

Într-o formă mai puțin precisă, dar mai plastică, putem spune că $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ *este cel mai mic clan borelian care conține familia* $\mathcal{E}$.

Familia $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ se numește *clanul borelian generat de familia de mulțimi* $\mathcal{E}$.

Exemplu. În un spațiu metric, familia mulțimilor boreliene (6.1.1.) este clanul borelian generat de familia mulțimilor închise (deschise).

§ 3. FUNCȚII MĂSURABILE ÎN RAPORT CU UN CLAN BORELIAN DAT

6.3.1. Fie T un spațiu și $\mathcal{A}$ un clan borelian definit pe T.

Prin definiție, o aplicație $x : T \to \overline{\mathbf{R}}$ este *etajată pe* $\mathcal{A}$ (sau, simplu, *etajată*) dacă:

1° x este o aplicație *simplă*, adică are un număr finit de valori

$$v_1, v_2, \ldots, v_m;$$

2° mulțimile

$$E_k = \{t : x(t) = v_k\} = x^{-1}(\{v_k\}), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

aparțin familiei $\mathcal{A}$.

Orice funcție finită, etajată pe $\mathcal{A}$, se poate scrie sub forma

$$x = \sum_{k=1}^{m} v_k \chi_{E_k}. \tag{1}$$

Formula rămîne valabilă și pentru cazul unei funcții etajate care nu este *finită* (unul sau mai multe din numerele v_k pot fi $+\infty$ sau $-\infty$) cu convenția de calcul următoare, pe care o vom întîlni în cursul acestui capitol:

$$(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu această convenție, din (1) rezultă că

$$|x| = \sum_{k=1}^{m} |v_k| \chi_{E_k}, \tag{2}$$

deci: *Dacă x este etajată (pe $\mathcal{A}$), atunci $|x|$ este etajată.*

6.3.2. Teorema I. *Mulțimea aplicațiilor etajate pe $\mathcal{A}$ formează un spațiu vectorial pe corpul numerelor reale.*

Fie, în adevăr, X această mulțime, $x \in X$ și $\alpha \in \mathbf{R}$. Din (1) deducem

$$\alpha x = \sum_{k=1}^{m} \alpha v_k \chi_{E_k},$$

deci $\alpha x \in X$.

Fie, în al doilea rînd, $x \in X$, $y \in Y$.

Dacă

$$x = \sum_{k=1}^{m} v_k \chi_{E_k}, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{F_i},$$

cu $E_k \in \mathcal{A}$, $F_i \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci punînd $A_{ki} = E_k \cap F_i$ și făcînd convenția de calcul $\infty - \infty = 0$, putem scrie

$$x + y = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (v_k + w_i) \chi_{A_{ki}},$$

deci $x + y \in X$.

Teorema II. *Produsul*[1] *a două funcții etajate este o funcție etajată.*

În adevăr, cu notațiile din teorema precedentă, putem scrie

$$xy = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_k w_i \chi_{A_{ki}}.$$

Exerciții: 1° Dacă x și y sînt etajate (pe $\mathcal{A}$), atunci $\sup(x,y)$ și $\inf(x,y)$ sînt etajate (pe $\mathcal{A}$).

2° Dacă $x \in X$, $y \in X$, atunci

$$\{t : x(t) > y(t)\} \in \mathcal{A}.$$

[1] Cu convenția de calcul precizată în **6.3.1.**

6.3.3. Vom atașa fiecărei funcții $x : T \to \overline{\mathbf{R}}$ funcțiile următoare:

$$x^+ = \sup.\{x, 0\} \quad x^- = -\inf\{x, 0\},$$

pe care le vom numi, respectiv, *partea pozitivă* și *partea negativă* a lui x. Evident

$$x^+ \geqq 0, \quad x^- \geqq 0$$

și

$$x = x^+ - x^-.$$

Vom spune că o funcție $x : T \to \overline{\mathbf{R}}$ este *măsurabilă*[1] *în raport cu clanul borelian* $\mathcal{A}$, pe scurt *măsurabilă* $(\mathcal{A})$, dacă există un șir $\{x_n\}$ de funcții etajate (pe $\mathcal{A}$) astfel încît să avem

$$\lim x_n(t) = x(t)$$

în orice punct $t \in T$.

Teoremă. *Funcția x este măsurabilă $(\mathcal{A})$ dacă și numai dacă x^+ și x^- sînt simultan măsurabile $(\mathcal{A})$.*

Să presupunem x măsurabilă $(\mathcal{A})$ și să considerăm șirul $\{x_n\}_{n \in N}$ de funcții etajate care tind către x.

Într-un punct $t \in T$ în care

$$0 \leqq x(t) < \infty,$$

termenii șirului precedent sînt pentru n suficient de mare $(n > n_0)$ *finiți*. Deci putem scrie, pentru $n > n_0$,

$$x_n^+(t) = \frac{1}{2}(|x_n(t)| + x_n(t)),$$

$$x_n^-(t) = \frac{1}{2}(|x_n(t)| - x_n(t)),$$

de unde

$$\lim_{n \to \infty} x_n^+(t) = \frac{1}{2}(|x(t)| + x(t)) = x^+(t),$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n^-(t) = x^-(t) = 0.$$

[1] Denumirea de „măsurabilă" nu este convențională, după cum se va vedea ulterior.

Într-un punct $t \in T$ în care

$$-\infty < x(t) \leqq 0$$

vom avea, raționînd în mod analog,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+(t) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n^-(t) = x^-(t).$$

Deci în orice punct t în care $|x(t)| < \infty$, șirul $\{x_n^+(t)\}_{n\in N}$ converge către $x^+(t)$, iar șirul $\{x_n^-(t)\}_{n\in N}$ converge către $x^-(t)$.

Dacă $x(t) = +\infty$, atunci $x^+(t) = +\infty$.

Cum

$$\lim x_n(t) = x(t) = +\infty,$$

rezultă că pentru n suficient de mare vom avea $x_n(t) > 0$, de unde $x_n^+(t) = x_n(t)$, $x_n^-(t) = 0$. Deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n^-(t) = 0 = x^-(t).$$

Dacă $x(t) = -\infty$, atunci $x^-(t) = \infty$.

Pentru n suficient de mare vom avea $x_n(t) < 0$, de unde $x_n^+(t) = 0 = x^+(t)$, $x_n^-(t) = -x_n(t)$ și

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+(t) = 0, \lim_{n\to\infty} x_n^-(t) = +\infty = x^-(t).$$

În definitiv, în *orice* punct $t \in T$ avem

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+(t) = x^+(t), \lim_{n\to\infty} x_n^-(t) = x^-(t).$$

Cum funcțiile x_n^+, x_n^- sînt etajate pe $\mathcal{A}$ (cf. ex. 1° din **6.3.2.**), rezultă că x^+, x^- sînt ambele măsurabile $(\mathcal{A})$.

Reciproc, dacă x^+, x^- sînt măsurabile $(\mathcal{A})$, fie respectiv $\{x_n^+\}_{n\in N}$, $\{x_n^-\}_{n\in N}$ șirurile de funcții etajate astfel încît, pentru orice $t \in T$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+(t) = x^+(t), \lim_{n\to\infty} x_n^-(t) = x^-(t).$$

Vom avea

$$x(t) = x^+(t) - x^-(t) = \lim_{n\to\infty} x_n^+(t) - \lim_{n\to\infty} x_n^-(t).$$

Scanned with OKEN Scanner

Este suficient să observăm că cele două limite nu sînt *simultan* infinite. În adevăr, dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+(t) = x^+(t) = +\infty,$$

atunci $x(t) = +\infty$, deci

$$x^-(t) = 0 = \lim_{n\to\infty} x_n^-(t).$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n^-(t) = x^-(t) = +\infty,$$

atunci $x(t) = -\infty$, de unde

$$x^+(t) = 0 = \lim_{n\to\infty} x_n^+(t).$$

Așadar, putem scrie

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} (x_n^+(t) - x_n^-(t)),$$

deci x este măsurabilă $(\mathcal{A})$.

6.3.4. Funcțiile măsurabile $(\mathcal{A})$ pot fi caracterizate și în alt mod, foarte util în teoria integralei:

Teoremă. *O aplicație $x: T \to \overline{\mathbf{R}}$ este măsurabilă $(\mathcal{A})$ dacă și numai dacă pentru orice mulțime deschisă G a dreptei numerice avem*

$$x^{-1}(G) \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Înainte de a trece la demonstrarea acestei importante teoreme, vom face cîteva observații, care ne vor servi la simplificarea enunțului teoremei.

Să observăm, în primul rînd, că dacă apartenența precedentă este valabilă pentru orice mulțime G deschisă, ea este în particular valabilă pentru mulțimile deschise următoare:

$$G_a^+ = (a, +\infty), \quad G_b^- = (-\infty, b),$$

deci și pentru un interval (a, b).

În al doilea rînd, vom observa că

$$x^{-1}(G_a^+) \in \mathcal{A}$$

pentru orice a dacă și numai dacă

$$x^{-1}(G_b^-) \in \mathcal{A}$$

pentru orice b.

Este suficient, pentru aceasta, să scriem identitățile

$$\{t : x(t) \geqq a\} = \bigcap_{n \in N} \left\{t : x(t) > a - \frac{1}{n}\right\},$$

$$\{t : x(t) > a\} = \bigcup_{n \in N} \left\{t : x(t) \geqq a + \frac{1}{n}\right\},$$

pe care cititorul le va verifica singur, ca exercițiu, de unde rezultă că

$$\{t : x(t) > a\} \in \mathcal{A},$$

dacă și numai dacă

$$\{t : x(t) \geqq a\} \in \mathcal{A}.$$

Cum

$$G_b^- = \mathbf{C}\{t\,;\, x(t) \geqq b\},$$

observația noastră este justificată.

Cele două observații ne vor permite să înlocuim enunțul precedent prin următorul:

O aplicație $x : T \to \overline{R}$ *este măsurabilă* $(\mathcal{A})$ *dacă și numai dacă*

$$x^{-1}(G_a^+) \in \mathcal{A} \tag{2}$$

oricare ar fi numărul a *real.*

Să arătăm echivalența celor două enunțuri. Dacă x este măsurabilă $(\mathcal{A})$, atunci, după primul enunț, (1) este verificată pentru orice mulțime deschisă G, deci în particular pentru mulțimea deschisă G_a^+. După al doilea enunț este verificată apartenența (2), oricare ar fi a real. Dar am văzut că relația (2) este verificată dacă și numai dacă

$$x^{-1}(G_b^-) \in \mathcal{A}, \tag{3}$$

de unde

$$x^{-1}(J) \in \mathcal{A}$$

pentru orice interval J al dreptei numerice.

Cum orice mulțime deschisă G a dreptei numerice este o reuniune cel mult numerabilă de intervale,

$$G = \bigcup_{n \in N} J_n,$$

rezultă că

$$x^{-1}(G) = \bigcup_{n \in N} x^{-1}(J_n) \in \mathcal{A}.$$

Putem trece acum la demonstrarea teoremei în a doua variantă a sa. Pentru simplificarea limbajului, vom numi proprietate ($\mathfrak{L}$) proprietatea exprimată de relația (2).

În baza egalității, ușor de verificat,

$$\{t : a \leqq x(t) < b\} = \{t : x(t) \geqq a\} \cap \{t : x(t) < b\},$$

rezultă că dacă funcția x posedă proprietatea ($\mathfrak{L}$), atunci

$$\{t : a \leqq x(t) < b\} \in \mathcal{A}, \tag{4}$$

oricare ar fi a, b reali.

Vom stabili acum următoarea

Lemă: *Aplicația* $x : T \to \overline{R}$ *posedă proprietatea* ($\mathfrak{L}$) *dacă și numai dacă* x^+ *și* x^- *posedă această proprietate.*

În adevăr, dacă relația (2) este verificată, atunci avem simultan

$$(x^+)^{-1}(G_a^+) \in \mathcal{A}, \quad (x^-)^{-1}(G_a^+) \in \mathcal{A},$$

deoarece $x^+ \geqq 0$, $x^- \geqslant 0$.

Reciproc, să presupunem că x^+ și x^- posedă proprietatea ($\mathfrak{L}$). Dacă $a \geqq 0$, atunci

$$\{t : x(t) > a\} = \{t : x^+(t) > a\} \in \mathcal{A}.$$

Dacă a este negativ, atunci

$$\{t : x(t) > a\} = \{t : x(t) > 0\} \cup \{t : 0 \geqq x(t) > a\} =$$

$$\{t : x^+(t) > 0\} \cup \{t : 0 \leqq -x(t) < -a\} =$$

$$\{t : x^+(t) > 0\} \cup \{t : 0 \leqq x^-(t) < -a\} \in \mathcal{A}.$$

Cu aceasta, lema este demonstrată. Să presupunem acum funcția x măsurabilă ($\mathcal{A}$) și să considerăm șirul $\{x_n\}_{n \in N}$ de funcții etajate care tind către x. Vom pune, pentru orice $t \in T$,

$$y_n(t) = \sup \{x_{n+1}(t), x_{n+2}(t), \ldots\}.$$

Din identitatea (exercițiu !)

$$\{t : y_n(t) > a\} = \bigcup_{p \in N} \{t : x_{n+p}(t) > a\}$$

deducem că toate funcțiile y_n posedă proprietatea (£). Dar șirul $\{y_n\}$ este descrescător și

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = x(t),$$

deci

$$\{t : x(t) \geqq a\} = \bigcap_{n\in N} \{t : y_n(t) \geqq a\}$$

și x posedă proprietatea (£).

Reciproc, să presupunem că x posedă proprietatea (£). Atunci, în baza lemei demonstrate, x^+ și x^- posedă această proprietate. Să punem $x^+ = y$, $x^- = z$. Avem $x = y - z$, cu $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

Să considerăm șirul $\{y_n\}_{n\in N}$ de funcții definite astfel:

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2}, & \text{dacă } \dfrac{i-1}{2^n} \leqq y < \dfrac{i}{2^n},\ i = 1, 2, \ldots, n\cdot 2^n, \\ n, & \text{dacă } y \geqq n. \end{cases}$$

Să definim, în același mod, în raport cu funcția z, șirul $\{z_n\}$.

Este vizibil că funcțiile celor două șiruri au fiecare cîte un număr finit de valori (anume, y_n ca și z_n iau $n \cdot 2^n + 1$ valori diferite).

Mulțimile pe care y_n (ca și z_n) ia aceste valori aparțin lui $\mathfrak{A}$, deoarece y (ca și z) posedă proprietatea (£). Deci funcțiile y_n și z_n sînt *etajate* (pe $\mathfrak{A}$).

Să considerăm acum un punct $t \in T$.

Dacă $y(t) < +\infty$, atunci pentru $n > y(t)$ vom avea

$$0 \leqq y(t) - y_n(t) < \frac{1}{2^n}.$$

Dacă $y(t) = +\infty$, atunci $y_n(t) = n$.

În ambele cazuri,

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t).$$

La fel

$$\lim_{n\to\infty} z_n(t) = z(t),$$

de unde

$$x(t) = \lim y_n(t) - \lim z_n(t) = \lim (y_n(t) - z_n(t)),$$

deoarece $\lim y_n(t) = y(t) = x^+(t)$, $\lim z_n(t) = z(t) = x^-(t)$, nu pot fi infinite în același timp.

Așadar x este măsurabilă ($\mathfrak{A}$) și teorema este demonstrată.

Corolar. *Orice funcție măsurabilă* ($\mathfrak{A}$) *este limita unui șir de funcții finite, etajate pe* $\mathfrak{A}$.

În adevăr, funcția $y_n - z_n$ este finită, oricare ar fi n, după cum rezultă din definiția lui y_n, ca și a lui z_n.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă observăm că şirul $\{y_n\}$, de exemplu, este crescător, corolarul precedent poate fi completat în modul următor:

Orice funcţie x pozitivă, măsurabilă $(\mathcal{A})$, este limita unui şir crescător de funcţii pozitive, finite, etajate pe $(\mathcal{A})$.

În ambele cazuri, în orice punct t pentru care $x(t) = +\infty$, şirul $\{x\}_{n\in N}$ se reduce la şirul $\{n\}$, iar în orice punct t pentru care $x(t) = -\infty$, şirul $\{x_n(t)\}$ se reduce la şirul $\{-n\}$, după cum rezultă din însăşi demonstraţia dată mai sus.

Aceste observaţii ne vor fi foarte utile.

Exerciţii: 1° Dacă x este măsurabilă $(\mathcal{A})$, atunci

$$\{t : x(t) = \alpha\} \in \mathcal{A},$$

oricare ar fi $\alpha \in R$.

2° Dacă x şi y sînt măsurabile $(\mathcal{A})$, atunci

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$

este măsurabilă $(\mathcal{A})$.

R: Se va observa, în primul rînd, că în orice punct t pentru care *nu* avem simultan $x(t) = \pm\infty$, $y(t) = \pm\infty$ (în toate cele patru combinaţii posibile), funcţia $x \vee y$ poate fi reprezentată astfel:

$$x \vee y = \frac{1}{2}(|x - y| + x + y). \qquad (*)$$

Dacă $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sînt şirurile de funcţii etajate pe $(\mathcal{A})$ *finite*, care tind respectiv către x şi y, şiruri construite mai sus, atunci

$$x \vee y = \frac{1}{2}\lim(|x_n - y_n| + x_n + y_n), \qquad (**)$$

în orice punct pentru care (*) are sens. În punctele în care simultan $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$, membrul al doilea este egal cu $\pm\infty$, corespondenţa dintre semne fiind vizibilă. Deci $x \vee y$ este măsurabilă $(\mathcal{A})$.

3° Dacă x şi y sînt măsurabile $(\mathcal{A})$, atunci $\inf\{x, y\}$ este măsurabilă $(\mathcal{A})$.

§ 4. OPERAŢII CU FUNCŢII MĂSURABILE

6.4.1. Am văzut mai sus că orice funcţie x măsurabilă $(\mathcal{A})$ poate fi considerată ca limita unui şir $\{x_n\}$ de funcţii etajate cu următoarele proprietăţi:

1° funcţiile şirului sînt *finite*;

2° în orice punct t, pentru care $x(t) = +\infty$, avem

$$x_n(t) = n;$$

Scanned with OKEN Scanner

3° $x(t) = -\infty$ implică $x_n(t) = -n$.

Vom numi, pentru simplitate, un astfel de șir, șirul de funcții etajate *asociat* funcției x.

Cu această definiție, putem enunța următoarea

Teoremă: *Dacă x și y sînt două funcții măsurabile $(\mathcal{A})$ și $\{x_n\}_{n\in N}$, $\{y_n\}_{n\in N}$ șirurile asociate respective de funcții etajate pe $\mathcal{A}$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n y_n$$

există în orice punct $t \in T$.

În adevăr, în orice punct în care una din funcțiile x, y este finită sau ambele sînt infinite de același semn, știm că

$$\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n = x + y.$$

Dacă într-un punct t avem, de exemplu, $x(t) = +\infty$ și $y(t) = -\infty$, atunci $x_n = n$ și $y_n = -n$, deci $x_n + y_n = 0$ pentru orice n, unde

$$\lim (x_n + y_n)(t) = 0.$$

Pentru stabilirea părții a doua a teoremei este suficient și ne ocupăm de punctele t pentru care avem, de exemplu, $x(t) = 0$, $y(t) = \pm\infty$.

Într-un astfel de punct avem $x_n = 0$, $y_n = \pm n$, de unde $x_n y_n = 0$ pentru orice n, deci

$$\lim (x_n y_n)(t) = 0.$$

6.4.2. Teorema precedentă ne permite să extindem operațiile de adunare și de înmulțire a funcțiilor măsurabile și în cazurile de nedeterminare.

Vom numi *sumă* a funcțiilor x, y, măsurabile $(\mathcal{A})$, funcția

$$\lim (x_n + y_n)$$

care, potrivit teoremei precedente, are o valoare determinată în orice punct $t \in T$.

Se verifică imediat că adunarea astfel definită este comutativă și asociativă.

În mod analog, funcția $t \to \lim_{n\to\infty} (x_n y_n)(t)$, care este peste tot definită, va fi numită produs al funcțiilor x, y.

Este vizibil că suma și produsul a două funcții măsurabile $(\mathcal{A})$ sînt două funcții măsurabile $(\mathcal{A})$.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă. *Dacă* $\{x_n\}_{n\in N}$ *este un șir de funcții măsurabile* $(\mathcal{A})$, *funcțiile următoare*

$$s = \inf_{n\in N}\{x_n\}, \qquad d = \sup_{n\in N}\{x_n\},$$

$$s_1 = \liminf_{n\in N}\{x_n\}, \qquad d_1 = \limsup_{n\in N}\{x_n\}$$

sînt măsurabile $(\mathcal{A})$.

Să observăm, în primul rînd, că

$$\inf\{x_n\} = -\sup\{-x_n\},$$

$$\liminf\{x_n\} = -\limsup\{-x_n\},$$

$$\limsup\{x_n\} = \inf_{n\in N}\sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Este deci suficient să arătăm că funcția d este măsurabilă $(\mathcal{A})$. Dar acest lucru rezultă imediat din identitatea, a cărei stabilire o lăsăm cititorului ca exercițiu,

$$\{t : d(t) > a\} = \bigcup_{n\in N}\{t : x_n(t) > a\}.$$

§ 5. MĂSURA

6.5.1. Fie T un spațiu (netopologizat) și $\mathcal{A}$ un clan boreliam de părți ale lui T.

O aplicație $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ este prin definiție o *măsură* (pe $\mathcal{A}$) dacă:

1° μ este *numerabil aditivă*. Aceasta înseamnă că pentru orice șir $\{E_n\}$, finit sau infinit de mulțimi *disjuncte* din $\mathcal{A}$, avem

$$\mu(\bigcup E_n) = \sum \mu(E_n);$$

2° există cel puțin o mulțime $E_0 \in \mathcal{A}$, de măsură *finită*.

6.5.2. Din definiția măsurii rezultă imediat următoarele proprietăți:

I. $\mu(\emptyset) = 0$.

În adevăr, avem pentru *orice* $E \in \mathcal{A}$

$$\mu(E \cup \emptyset) = \mu(E) = \mu(E) + \mu(\emptyset).$$

Ținînd seama că există cel puțin o mulțime E de măsură finită, deducem, din egalitatea precedentă, $\mu(\emptyset) = 0$.

II. *Măsura este o funcție monotonă de mulțime.*

Înțelesul acestei propoziții este următorul: dacă $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{A}$ și $E \subseteq F$, atunci $\mu(E) \leqslant \mu(F)$.

Demonstrația propoziției este imediată. În adevăr,

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geqq \mu(E),$$

deoarece mulțimile E și $F - E$ sînt disjuncte.

III. *Dacă* $E \subset F$, $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{A}$, *atunci*

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E).$$

(Măsura este o funcție *substractivă* de mulțime.)

Consecință a demonstrației propoziției precedente.

6.5.3. Proprietățile ce urmează sînt frecvent utilizate în teoria măsurii și a integralei.

Teorema I. *Măsura este o funcție numerabil subaditivă de mulțime.*

Înțelesul acestui enunț este următorul: Pentru orice șir $\{E_n\}$ de mulțimi din $\mathcal{A}$ *disjuncte sau nu*, avem

$$\mu(\bigcup E_n) \leqq \sum \mu(E_n).$$

Pentru demonstrarea acestei propoziții vom utiliza un artificiu util și în alte probleme. Anume, vom înlocui șirul $\{E_n\}$ printr-un șir $\{G_n\}$ cu următoarele proprietăți:

1° Mulțimile G_n sînt disjuncte.

2° $G_n \subseteq E_n$, $n = 1, 2, \ldots$

3° $\bigcup G_n = \bigcup E_n$.

Este suficient să definim recurent șirul $\{G_n\}$ în modul următor:

$$G_1 = E_1,\ G_n = E_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k,\ n = 1, 2, \ldots$$

Să arătăm că șirul $\{G_n\}$ îndeplinește condițiile cerute. Condiția 2° este vizibil îndeplinită.

În ceea ce privește condiția 1°, este suficient să considerăm mulțimile

$$G_n = E_n - \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

$$G_{n+p} = E_{n+p} - \bigcup_{k=1}^{n+p-1} E_k,$$

pentru a constata, pe aceste egalități, că $G_n \cap G_{n+p} = \emptyset$.

Rămîne să verificăm condiția 3°. Evident,

$$\bigcup G_n \subseteq \bigcup E_n.$$

Vom stabili deci incluziunea

$$\bigcup E_n \subseteq \bigcup G_n.$$

Fie t un punct aparținînd primului membru. Există deci E_n astfel încît $t \in E_n$.

Să notăm cu n_0 cel mai mic număr natural pentru care $t \in E_{n_0}$. Atunci, pentru $n < n_0$, $t \notin E_n$, deci $t \in G_{n_0} \subseteq \bigcup G_n$ și condiția 3° este verificată.

O dată șirul $\{G_n\}$ construit, putem scrie, în baza aditivității numerabile și a proprietății de monotonie,

$$\mu(\bigcup E_n) = \mu(\bigcup G_n) = \sum \mu(G_n) \leqq \sum \mu(E_n).$$

Teorema II. *Pentru orice șir ascendent $\{E_n\}$ de mulțimi din $\mathfrak{A}$ avem*

$$\lim \mu(E_n) = \mu(\lim E_n).$$

În adevăr, șirul dat fiind ascendent,

$$\lim E_n = \bigcup_{n \in N} E_n = \bigcup_{n \in N} (E_n - E_{n-1}),$$

cu convenția $E_0 = \emptyset$.

Mulțimile din ultimul membru fiind disjuncte, avem, în baza proprietății de substractivitate,

$$\mu(\lim E_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in N} (E_n - E_{n-1})\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n - E_{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})] = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

Teorema III. *Pentru orice șir descendent $\{E_n\}$ de mulțimi din $\mathfrak{A}$ pentru care $\mu(E_1) < \infty$, avem*

$$\lim \mu(E_n) = \mu\,(\lim E_n).$$

În adevăr, prin ipoteză

$$\lim E_n = \bigcap_{n \in} E_n \subseteq E_1,$$

deci

$$\mu(\lim E_n) \leqq \mu(E_1) < \infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să punem

$$E_1 - E_n = G_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Șirul $\{G_n\}$ este ascendent. Deci, în baza teoremei II,

$$\mu(\lim G_n) = \mu(\lim (E_1 - E_n) = \mu(E_1) - \mu(\lim E_n) = \lim \mu(G_n) =$$
$$= \lim [\mu(E_1) - \mu(E_n)] = \mu(E_1) - \lim \mu(E_n),$$

de unde egalitatea cerută.

Teorema IV: *Dacă* $\{E_n\}$ *este un șir de mulțimi din* $\mathcal{A}$, *atunci*

$$\mu(\lim \inf E_n) \leqq \lim \inf \mu(E_n).$$

În adevăr, să punem $A_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$. Șirul $\{A_n\}$ este ascendent și avem $A_n \subseteq E_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Deducem, aplicînd teorema II,

$$\mu(\lim A_n) = \mu(\lim \inf E_n) = \lim \mu(A_n) \leqq \lim \inf \mu(E_n).$$

Exerciții: 1° Vom spune că o aplicație $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ este *finit* aditivă dacă pentru orice șir finit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de mulțimi disjuncte din $\mathcal{A}$ avem

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k).$$

Să se arate că dacă pentru orice șir ascendent $\{A_n\}$ de mulțimi din $\mathcal{A}$ avem

$$\lim \mu(A_n) = \mu(\lim A_n),$$

atunci μ este o măsură (A. Kolmogorov).

2° În ce condiții avem, pentru un șir $\{E_n\}$ de mulțimi din $\mathcal{A}$,

$$\mu(\lim \sup E_n) \geqq \lim \sup \mu(E_n)\,?$$

R: Condiția este: $\mu(\bigcup E_n) < \infty$.

§ 6. CONVERGENȚA ASIMPTOTICĂ. TEOREMA LUI EGOROV. CONVERGENȚA ÎN MĂSURĂ

6.6.1. Fie T un spațiu (netopologizat), $\mathcal{A}$ un clan borelian de părți ale lui T, μ o măsură pe $\mathcal{A}$.

Vom spune că o proprietate locală (adică: o proprietate care are loc în un punct) are loc *aproape pretutindeni* în raport cu măsura μ (pe scurt

a.p. (μ)), dacă mulţimea punctelor în care proprietatea nu are loc aparţine lui $\mathfrak{A}$ şi este de măsură nulă.

Vom spune că un şir $\{x_n\}_{n\in N}$ de funcţii reale (nu neapărat măsurabile ($\mathfrak{A}$)), definite pe T, a.p. (μ) finite pe T, converge asimptotic (converge aproape asimptotic) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime $E_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, cu $\mu(E_\varepsilon)$ ε, $<$ astfel încît şirul dat converge uniform (converge) pe mulţimea $\mathbf{C}E_\varepsilon$.

Teoremă. *Un şir $\{x_n\}_{n\in N}$ (aproape) asimptotic convergent converge a.p. (μ) pe T către o funcţie x a.p. (μ) finită.*

Să punem

$$G_n = \{t : |x_n(t)| = +\infty\},\ G = \bigcup_{n\in N} G_n.$$

Evident, $\mu(G) = 0$. Pe mulţimea G, şirul considerat nu converge. Să luăm $\varepsilon = \frac{1}{p}$ şi să punem $F = \bigcap_{p\in N} E_{\frac{1}{p}}$. Avem, pe de o parte, $\mu(F) = 0$, iar, pe de altă parte,

$$\mathbf{C}F = \bigcup_{p\in N} \mathbf{C}E_{\frac{1}{p}}$$

Fie $t \in \mathbf{C}F$, altfel arbitrar. Există un număr natural p, astfel încît $t \in E_{\frac{1}{p}}$. Deci şirul $\{x_n(t)\}_{n\in N}$ converge către $x(t)$.

Funcţia x este definită şi finită pe spaţiul T, cu excepţia punctelor mulţimii $F \cup G$, pentru care $0 \leqq \mu(F \cup G) \leqq \mu(F) + \mu(G) = 0$.

6.6.2. În un caz special, foarte important pentru teoria integrării, teorema precedentă se poate inversa.

Teorema lui Egorov. *Dacă $E \in \mathfrak{A}$ şi $\mu(E) < +\infty$ şi dacă şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ de funcţii măsurabile ($\mathfrak{A}$), a.p. (μ) finite, converge a.p. (μ) către funcţia finită x, atunci şirul considerat converge asimptotic în E.*

Fie $G_n = \{t : |x_n(t)| = +\infty,\ n = 1, 2, \ldots\}$ şi H mulţimea punctelor din E în care convergenţa şirului nu are loc. Mulţimea $H \cup \bigcup_{n\in N} G_n$ este de măsură μ nulă. Extrăgînd această mulţime din E, putem în definitiv să presupunem toate funcţiile x_n finite şi şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ convergent în orice punct din E.

Cu această observaţie să ataşăm perechii $\{m, n\}$ de numere naturale mulţimea

$$E_{m,n} = \bigcap_{p\geqq n} \left\{t : |x(t) - x_p(t)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Evident, $E_{m,n} \in \mathfrak{A}$, oricare ar fi m şi n.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, în orice punct $t \in E$ diferența

$$|x(t) - x_p(t)|$$

devine, pentru p suficient de mare, inferioară lui $\frac{1}{m}$. Deci

$$E = \bigcup_{n \in N} E_{m,n}.$$

Cum șirul $\{E_{m,n}\}_{n \in N}$ este ascendent, vom avea (**6.5.3.**, teorema II)

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n \in N} E_{m,n}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_{m,n}).$$

Deci

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E - E_{m,n}) = 0.$$

Aceasta înseamnă că pentru orice pereche (m, ε) există un număr natural k_m astfel încît

$$\mu(E - E_{m,k_m}) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Să punem

$$E_0 = \bigcap_{m \in N} E_{m,k_m}.$$

Evident, $E_0 \in \mathfrak{A}$. Apoi

$$\mu(E - E_0) = \mu\left(E - \bigcap_{m \in N} E_{m,k_m}\right) = \mu\left(\bigcup_{m \in N} (E - E_{m,k_m})\right),$$

de unde

$$\mu(E - E_0) \leqq \sum_{m \in N} \mu(E - E_{m,m_k}) < \varepsilon.$$

Vom arăta că șirul considerat converge *uniform* pe E_0. În adevăr, din definiția mulțimilor $E_{m,n}$ rezultă că pentru un m dat, inegalitatea $p > k_m$ implică

$$|x(t) - x_p(t)| < \frac{1}{m},$$

pentru orice punct $t \in E_{m,k_m}$, deci cu atît mai mult pentru orice punct din E_0.

Scanned with OKEN Scanner

6.6.3. Vom spune că un şir de funcţii $\{x_n\}_{n\in N}$ măsurabile $(\mathcal{A})$, converge *în măsură* către funcţia x, dacă din orice subşir al acestuia se poate extrage un altul, convergent a.p. (μ) către x.

Din definiţia dată rezultă imediat că:

I. *Orice subşir al unui şir convergent în măsură este convergent în măsură, către aceeaşi funcţie ca şirul iniţial.*

II. *Dacă şirul* $\{x_n\}_{n\in N}$ *de funcţii măsurabile* $(\mathcal{A})$ *converge în măsură către* x, *funcţia* x *este măsurabilă* $(\mathcal{A})$.

O definiţie echivalentă[1] este dată de următoarea

Teoremă. *Un şir* $\{x_n\}_{n\in N}$ *de funcţii măsurabile* $(\mathcal{A})$ *este convergent în măsură către* x *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} \mu[\{t : |x(t) - x_n(t)| \geqq \varepsilon] = 0.$$

În adevăr, să presupunem în primul rînd condiţia din enunţ îndeplinită. Vom arăta că şirul dat conţine un subşir asimptotic convergent. Cum orice subşir al unui şir asimptotic convergent este asimptotic convergent, iar, pe de altă parte, un şir asimptotic convergent este convergent a.p. (μ), va rezulta că şirul dat este convergent în măsură.

Din egalitatea precedentă rezultă că există un număr natural n_1 astfel încît

$$\mu[\{t : |x(t) - x_{n_1}(t)| \geqq 1] < 1,$$

apoi un număr natural $n_2 > n_1$ astfel încît

$$\mu\left[\left\{t : |x(t) - x_{n_2}(t)| \geqq \frac{1}{2}\right\}\right] < \frac{1}{2}$$

ş.a.m.d. Obţinem, prin recurenţă, şirul crescător $\{n_k\}$ de numere naturale, pentru care

$$\mu(E_k) < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

unde

$$E_k = \left\{t : |x(t) - x_{n_k}(t)| \geqq \frac{1}{2^{k-1}}\right\}.$$

Fie $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar. Fie, de asemenea, k_0 cel mai mic număr natural pentru care $\frac{1}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$.

---

[1] Teorema care urmează explică expresia de „convergenţă în măsură". Noi am preferat definiţia din text, datorită lui F. Riesz şi B. Sz. Nagy (*Leçons d'Analyse fonctionnelle*, IIIe ed. Budapest-Paris, 1955, p. 100) din cauza simplităţii ei.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, pentru $k > k_0$ vom avea $\mu(E_k) < \varepsilon$ și pentru $t \notin E_k$ vom avea

$$|x(t) - x_{n_k}(t)| < \varepsilon,$$

deci șirul $\{x_{n_k}\}$ converge asimptotic.

Să presupunem acum șirul dat convergent în măsură. Dacă egalitatea din enunț nu ar fi îndeplinită, ar exista un număr $\varepsilon > 0$ astfel încît șirul

$$\{\mu[\{t : |x(t) - x_n(t)| \geqq \varepsilon\}]\}$$

nu ar tinde către zero. Deci ar exista un număr pozitiv δ și un șir crescător $\{n_k\}_{k \in N}$ de numere naturale, astfel încît

$$\mu[\{t : |x(t) - x_{n_k}(t)| \geqq \varepsilon\}] \geqq \delta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Evident, aceste inegalități ar fi verificate pentru orice subșir al lui $\{n_k\}$. Prin ipoteză, șirul $\{x_{n_k}\}$ conține un subșir, pe care îl vom nota pentru simplitate la fel, convergent către x, a.p. (μ). Numărului ε i-ar corespunde deci un număr natural k_0, astfel încît pentru $k > k_0$ să avem a.p. (μ)

$$|x(t) - x_{n_k}(t)| < \varepsilon.$$

Dar această inegalitate nu poate avea loc în punctele mulțimilor

$$G_k = \{t : |x(t) - x_{n_k}(t)| \geqq \varepsilon\},$$

pentru care $\mu(G_k) \geqq \delta$. Contradicția obținută demonstrează complet teorema.

Exerciții: 1° Să se arate că dacă $E = \bigcup E_n$, cu $\mu(E_n) < +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$ și dacă $\{x_n\}$ este un șir de funcții măsurabile $(\mathcal{A})$ a.p. (μ) finite pe E, convergent a.p. (μ) către x, atunci

$$E = H \cup \bigcup_{n \in N} E_0^n$$

cu $\mu(H) = 0$, iar șirul $\{x_n\}$ converge uniform pe fiecare din mulțimile E_0^n (*N. Luzin*).

R: Se poate presupune, fără micșorarea generalității, $\mu(E) < +\infty$ și funcțiile x_n finite. În baza teoremei lui Egorov, există un șir $\{E_k\}$ de mulțimi din $\mathcal{A}$, conținute în E, astfel încît $\mu\left(E - \bigcup_{k \leqq n} E_k\right) < \frac{1}{n}$, șirul $\{x_n\}$ convergînd uniform pe fiecare mulțime E_k.

Este suficient să se pună $H = E - \bigcup_{k \in N} E_k$.

2° O mulțime $E \in \mathcal{A}$ este, prin definiție, de măsură σ-finită dacă $E = \bigcup_{n \in N} E_n$, cu $\mu(E_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Să se construiască un exemplu

din care să se vadă că teorema precedentă a lui Luzin nu mai este valabilă pentru mulțimile E care nu sînt de măsură σ-finită.

R: Se va lua $E = [0, 1]$ și $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(E)$. Se va defini o măsură $\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ astfel:

$$\mu(F) = \begin{cases} n, & \text{dacă } F \text{ este finită, cu } n \text{ elemente,} \\ \infty, & \text{dacă } F \text{ este infinită.} \end{cases}$$

Se va considera în sfîrșit un șir $\{x_n\}$ de funcții continue, convergent pe $[0, 1]$, dar care să nu conveargă uniform pe nici un subinterval al lui $[0, 1]$.

Este vizibil că E nu este de măsură σ-finită.

Vom arăta că proprietatea lui Luzin nu are loc. În adevăr, dacă am avea $E = \bigcup_{n \in N} E_n$ (întrucît singura mulțime de măsură nulă este mulțimea vidă!) astfel încît șirul considerat să conveargă uniform, putem presupune aceste mulțimi închise.

Dar atunci, în baza teoremei lui Baire, una cel puțin din aceste mulțimi ar conține un subinterval al lui $[0, 1]$ pe care șirul considerat ar converge uniform.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

INTEGRALA

§ 1. INTEGRAREA FUNCȚIILOR ETAJATE

7.1.1. Fie T un spațiu (netopologizat) $\mathcal{A}$ un clan borelian de părți ale lui T, μ o măsură pe $\mathcal{A}$.

Vom numi sistemul $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un *spațiu de măsuri.*

Fie x o funcție etajată pe $\mathcal{A}$. După cum știm (**6.3.1.**), putem totdeauna scrie o astfel de funcție sub forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}, \qquad a_k \in \overline{\mathbf{R}} \tag{1}$$

cu convenția de calcul specificată în **6.3.1.**

Vom spune că o astfel de aplicație este *integrabilă în raport cu măsura* μ (pe scurt: *integrabilă* (μ) sau pur și simplu *integrabilă* dacă nici o confuzie nu este posibilă), dacă $a_k \neq 0$ implică $\mu(E_k) < \infty$ și $a_k = \pm\infty$ implică $\mu(E_k) = 0$.

Integrala unei funcții etajate integrabile (μ) va fi, prin definiție, suma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu(E_k),$$

cu convenția de calcul din **6.3.1.**

Din definiție rezultă că, în cazul integrabilității, suma precedentă este totdeauna finită.

Vom scrie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu(E_k) = \int x(t)\mathrm{d}\mu(t) = \int x\mathrm{d}\mu.$$

Fie $E \in \mathcal{A}$, altfel arbitrară. Dacă x este integrabilă, atunci $x \cdot \chi_E$ este integrabilă (exercițiul). Prin definiție

$$\int_E x \mathrm{d}\mu = \int x\chi_E \mathrm{d}\mu.$$

7.1.2. Din definițiile date rezultă imediat cîteva proprietăți.

I. *Dacă funcția x, etajată pe $\mathcal{A}$, este integrabilă (μ) și $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci αx este integrabilă (μ) și avem*

$$\int \alpha x \mathrm{d}\mu = \alpha \int x \mathrm{d}\mu.$$

Rezultă imediat din reprezentarea (1) și din definiția integralei.

II. *Dacă funcțiile x, y, etajate pe $\mathcal{A}$, sînt integrabile (μ), atunci funcția definită astfel*

$$z(t) = \begin{cases} x(t) + y(t), & \text{dacă } |x(t)| < \infty, \text{ sau } |y(t)| < \infty, \\ 0, & \text{dacă } x(t) = \pm\infty \text{ și } y(t) = \mp\infty \end{cases}$$

este integrabilă (μ) și avem

$$\int z \mathrm{d}\mu = \int x \mathrm{d}\mu + \int y \mathrm{d}\mu.$$

În adevăr, dacă

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}, \quad y = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{F_i},$$

atunci

$$z(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_k + b_i) \chi_{E_k \cap F_i}.$$

Din

$$\mu(E_k \cap F_i) \leqq \begin{cases} \mu(E_k) \\ \mu(F_i) \end{cases}$$

rezultă că $\mu(E_k \cap F_i) = +\infty$ implică simultan $\mu(E_k) = +\infty$, $\mu(F_i) = +\infty$, de unde $a_k = 0$, $b_i = 0$, de unde $a_k + b_i = 0$. Așadar z este integrabilă (μ) și avem

$$\int z \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_k + b_i) \mu(E_k \cap F_i),$$

sau

$$\int z \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) + \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(F_i) = \int x \mathrm{d}\mu + \int y \mathrm{d}\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.1.3. Dacă x este o funcție etajată pe $\mathcal{A}$, pozitivă, deci dacă

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k},$$

cu $a_k \geqq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, expresia

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

are *totdeauna* sens. Vom continua să scriem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k) = \int x \mathrm{d}\mu$$

chiar în cazul în care primul membru are valoarea $+\infty$. Vom continua, de asemenea, să numim membrul al doilea al egalității precedente, *integrala* funcției x (în raport cu măsura μ).

Cu această convenție, *o funcție x, etajată pe $\mathcal{A}$, pozitivă, este integrabilă* (μ) *dacă integrala sa în raport cu măsura μ este finită.*

Să semnalăm încă următoarele proprietăți:

I. *Dacă funcțiile x, y sînt etajate pe $\mathcal{A}$ și pozitive, atunci*

$$\int (x + y)\mathrm{d}\mu = \int x \mathrm{d}\mu + \int y \mathrm{d}\mu.$$

Singura parte nouă față de propoziția II din **7.1.2.** este că una cel puțin din integralele

$$\int x \mathrm{d}\mu, \int y \mathrm{d}\mu$$

poate fi egală cu $+\infty$. Dar raționamentul făcut mai sus se aplică și în acest caz.

II. *Dacă $0 \leqq x \leqq y$ și funcțiile x, y sînt etajate pe $\mathcal{A}$, atunci*

$$0 \leqq \int x \mathrm{d}\mu \leqq \int y \mathrm{d}\mu.$$

Să observăm că dacă într-un punct t avem $x(t) = +\infty$, atunci $y(t) = +\infty$ și

$$0 < \int x \mathrm{d}\mu = \int y \mathrm{d}\mu = +\infty.$$

De asemenea, dacă într-un punct t avem $y(t) = \infty$, atunci

$$\int y \mathrm{d}\mu = +\infty$$

și dubla inegalitate este iar verificată.

Scanned with OKEN Scanner

Putem deci să ne reducem la cazul în care funcțiile x, y sînt ambele *finite*.

Să punem, în acest caz,

$$z = y - x,$$

de unde

$$y = x + z, \qquad (x \geqq 0,\ z \geqq 0),$$

deci (**7.1.2.**) propoziția II),

$$\int y\,d\mu = \int x\,d\mu + \int z\,d\mu \geqq \int x\,d\mu \geqq 0.$$

§ 2. FUNCȚII INTEGRABILE

7.2.1. Fie $x : T \to \overline{\mathbf{R}}_+$, măsurabilă ($\mathcal{A}$). Fie, de asemenea, $\{x_n\}$ un șir crescător de funcții etajate pe $\mathcal{A}$, pozitive, tinzînd către x (Un astfel de șir este, de exemplu, șirul *atașat* funcției x).

Din **7.1.3.**., propoziția II, rezultă că șirul

$$\left\{\int x_n\,d\mu\right\}$$

este crescător. Deci acest șir are o limită, finită sau nu. Prin definiție,

$$\int x\,d\mu = \lim \int x_n\,d\mu.$$

Numărul $\int x\,d\mu$ astfel definit se numește integrala funcției x (în raport cu măsura μ).

Fie $\{y_n\}$ un șir crescător de funcții etajate pe $\mathcal{A}$, pozitive, astfel încît

$$\lim y_n = \lim x_n = x.$$

Vom arăta că

$$\lim \int y_n\,d\mu = \lim \int x_n\,d\mu. \tag{1}$$

În acest fel, definiția integralei $\int x\,d\mu$ devine independentă de șirul crescător de funcții etajate pe $\mathcal{A}$, pozitive, care tinde spre x.

Pentru demonstrarea acestui fapt vom avea nevoie de următoarea:

Lemă: *Dacă* $\{z_n\}$ *este un șir crescător de funcții etajate pe* $\mathcal{A}$, *pozitive, integrabile* (μ) *și dacă* z_0 *este o funcție etajată pe* $\mathcal{A}$, *pozitivă, astfel încît*

$$\lim_{n\to\infty} z_n \geqq z_0,$$

atunci

$$\lim \int z_n d\mu \geqq \int z_0 d\mu.$$

În adevăr, șirul $\left\{\int z_n d\mu\right\}$ este crescător, deci are o limită, finită sau nu.

Să presupunem, în primul rînd, funcția z_0 *finită* și să notăm, respectiv, cu a și cu b cea mai mică valoare (strict pozitivă) și cea mai mare valoare pe care o ia z_0. Fie $\varepsilon < a$ pozitiv, altfel arbitrar. Vom pune

$$A_n = \{t : z_n(t) > z_0(t) - \varepsilon\}.$$

Șirul $\{A_n\}_{n\in N}$ este vizibil ascendent și

$$T = \bigcup_{n\in N} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

de unde

$$\lim \mu(A_n) = \mu(T).$$

Dacă $\mu(T) = +\infty$, atunci putem scrie

$$\int z_n d\mu \geqq \int_{A_n} z_n d\mu \geqq \int_{A_n} (z_0 - \varepsilon) d\mu \geqq (a - \varepsilon)\, \mu(A_n),$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \int z_n d\mu = +\infty$$

și lema este verificată.

Dacă $\mu(T) < \infty$, atunci există un număr natural n_ε, astfel încît $n > n_\varepsilon$ să implice $\mu(T - A_n) < \varepsilon$, de unde

$$\int z_n d\mu \geqq \int_{A_n} z_n d\mu \geqq \int_{A_n} (z_0 - \varepsilon) d\mu = \int_{A_n} z_0 d\mu - \varepsilon\, \mu(A_n) \geqq$$

$$\geqq \int z_0 d\mu - \int_{T-A_n} z_0 d\mu - \varepsilon\mu(T) \geqq \int z_0 d\mu - \varepsilon b - \varepsilon\mu(T).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum ε este arbitrar, obținem și de data aceasta

$$\lim \int z_n d\mu \geqq \int z_0 d\mu.$$

Dacă z_0 nu este finită, să notăm cu B mulțimea punctelor $t \in T$, pentru care $z_0(t) = +\infty$.

Evident, $B \in \mathcal{A}$.

Vom deosebi două cazuri:

1° $\mu(B) > 0$. În acest caz, $\int z_0 d\mu = +\infty$.

Rămîne să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \int z_n d\mu = +\infty.$$

Fie p un număr natural arbitrar. Vom nota cu B_n mulțimea punctelor din B, definită astfel:

$$B_n = \{t : z_n(t) > p\}.$$

Șirul $\{B_n\}$ este ascendent și avem $B = \bigcup_{n\in N} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n$, de unde $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$. Deci

$$\int z_n d\mu \geqq \int_{B_n} z_n d\mu > p \cdot \mu(B_n),$$

de unde

$$\lim \int z_n d\mu = +\infty.$$

2° $\mu(B) = 0$. În acest caz, punînd $T_1 = T - B$, avem, respectiv,

$$\int_{T_1} z_n d\mu = \int z_n d\mu, \quad \int_{T} z_0 d\mu = \int z_0 d\mu.$$

Putem deci înlocui, în raționamentele noastre, spațiul prin T_1. Dar z_0 este *finită* pe T_1. Sîntem astfel reduși la prima parte a raționamentului: cu aceasta, lema este complet stabilită.

Să trecem acum la demonstrarea egalității (1). Fie $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ două șiruri crescătoare de funcții etajate pe $\mathcal{A}$, pozitive, astfel încît

$$\lim x_n = \lim y_n = x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Oricare ar fi numărul natural m, vom avea

$$y_m \leqq x = \lim x_n,$$

deci, în baza lemei,

$$\int y_m d\mu \leqq \lim_{n\to\infty} \int x_n d\mu,$$

de unde

$$\lim_{m\to\infty} \int y_m d\mu \leqq \lim_{n\to\infty} \int x_n d\mu.$$

Schimbînd rolul celor două şiruri, obţinem, inegalitatea opusă, de unde egalitatea cerută.

7.2.2. Proprietăţile integralelor funcţiilor etajate (integrabile) se extind cu uşurinţă la integralele funcţiilor măsurabile ($\mathcal{A}$), pozitive:

I. *Dacă x şi y sînt funcţii măsurabile ($\mathcal{A}$), pozitive, atunci*

$$\int (x + y)\, d\mu = \int x d\mu + \int y d\mu.$$

În adevăr, dacă $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sînt două şiruri crescătoare de funcţii etajate pe $\mathcal{A}$, *pozitive*, tinzînd respectiv către x şi y, din egalitatea

$$\int x_n d\mu + \int y_n d\mu = \int (x_n + y_n) d\mu$$

deducem, pentru $n \to \infty$,

$$\int x d\mu + \int y d\mu = \int (x + y) d\mu.$$

II. *Dacă x şi y sînt funcţii măsurabile ($\mathcal{A}$), pozitive, atunci $x \leqq y$ implică*

$$0 \leqq \int x d\mu \leqq \int y d\mu.$$

În adevăr, păstrînd notaţiile din proprietatea precedentă, din inegalitatea

$$x_m \leqq \lim y_n,$$

valabilă pentru orice m natural, deducem, aplicînd lema din 7.2.1.,

$$\int x_m d\mu \leqq \lim \int y_n d\mu = \int y d\mu,$$

de unde, pentru $m \to \infty$,

$$\int x d\mu \leqq \int y d\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.2.3. Vom spune că o funcţie x, măsurabilă $(\mathcal{A})$, pozitivă, este *integrabilă* (μ), dacă

$$\int x \, d\mu < +\infty.$$

Să considerăm acum o funcţie x măsurabilă $(\mathcal{A})$, asupra semnului căreia nu facem nici o ipoteză. Ştim că putem scrie

$$x = x^+ - x^-,$$

cu $x^+ \geqq 0$, $x^- \geqq 0$, funcţiile x^+ şi x^- fiind măsurabile $(\mathcal{A})$.

Dacă integralele

$$\int x^+ \, d\mu, \int x^- \, d\mu \tag{2}$$

nu sînt amîndouă infinite de acelaşi sens, vom pune, prin definiţie,

$$\int x \, d\mu = \int x^+ \, d\mu - \int x^- \, d\mu \tag{3}$$

şi vom numi expresia din membrul al doilea al acestei relaţii integrala lui x în raport cu măsura μ.

Dacă integralele (2) sînt, ambele, *finite*, vom spune că x este *integrabilă* (μ). Integrala lui x în raport cu măsura μ va fi definită tot prin egalitatea (3).

Să observăm că dacă

$$x = x' - x'',$$

cu $x' > x^+$, de unde $x'' > x^-$ şi dacă funcţiile pozitive sînt integrabile (μ), atunci x este integrabilă (μ) şi avem

$$\int x \, d\mu = \int x' \, d\mu - \int x'' \, d\mu.$$

În adevăr, din egalitatea

$$x' - x'' = x^+ - x^-$$

deducem

$$x' - x^+ = x'' - x^- = z,$$

cu z pozitiv, de unde

$$\int x' \, d\mu = \int x^+ \, d\mu + \int z \, d\mu,$$

$$\int x'' \, d\mu = \int x^- \, d\mu + \int z \, d\mu,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\int x\,d\mu = \int x'\,d\mu - \int x''\,d\mu.$$

Această observaţie ne va fi imediat utilă.

Exerciţiu : Să se arate că dacă integrala $\int x\,d\mu$ are sens, atunci $\int x\cdot\chi_E\,d\mu$, unde $E\in\mathcal{A}$, are sens.

R : Se va observa că $(x\chi_E)^+ = x^+\chi_E$ şi $(x\chi_E)^- = x^-\cdot\chi_E$.

7.2.4. Ori de cîte ori integrala

$$\int x\,d\mu$$

are sens, vom pune — prin definiţie — dacă $E\in\mathcal{A}$,

$$\int_E x\,d\mu = \int x\cdot\chi_E\,d\mu.$$

Este natural ca în membrul II să facem convenţia de calcul $\pm\infty\cdot 0=0$, în punctele $t_0\notin E$ pentru care $x(t_0)=\pm\infty$.

7.2.5. Din definiţiile date mai sus rezultă imediat cîteva proprietăţi ale integralei funcţiilor măsurabile $(\mathcal{A})$:

I. *Dacă x are o integrală şi $\{x_n\}_{n\in N}$ este şirul de funcţii etajate pe $\mathcal{A}$, asociat lui x, atunci*

$$\int x\,d\mu = \lim\int x_n\,d\mu.$$

În adevăr, $\{x_n^+\}$ este asociat lui x^+ şi $\{x_n^-\}$ este asociat lui x^-, deci

$$\int x d\mu = \int x^+ d\mu - \int x^- d\mu = \lim\int x_n^+\,d\mu - \lim\int x_n^-\,d\mu =$$

$$= \lim\int (x_n^+ - x_n^-)d\mu = \lim\int x_n d\mu.$$

II. *Dacă x are o integrală şi $\alpha\in\mathbf{R}$, atunci αx are o integrală şi*

$$\int \alpha x\,d\mu = \alpha\int x d\mu.$$

III. *Dacă x și y sînt integrabile* (μ), *atunci suma* $x + y$[1] *este integrabilă* (μ) *și avem*

$$\int (x + y)\mathrm{d}\mu = \int x\mathrm{d}\mu + \int y\mathrm{d}\mu.$$

În adevăr

$$\int x\mathrm{d}\mu + \int y\mathrm{d}\mu = \int (x^+ + y^+)\mathrm{d}\mu - \int (x^- + y^-)\,\mathrm{d}\mu.$$

Cum

$$x^+ + y^+ \geqq 0,\ x^- + y^- \geqq 0,$$
$$x + y = (x^+ + y^+) - (x^- + y^-),$$

iar, pe de altă parte, $x^+ + y^+ > (x + y)^+$, rezultă, în baza observației de la sfîrșitul numărului 7.2.3., că $x + y$ este integrabilă (μ) și că

$$\int (x + y)\mathrm{d}\mu = \int (x^+ + y^+)\mathrm{d}\mu - \int (x^- + y^-)\mathrm{d}\mu = \int x\mathrm{d}\mu + \int y\mathrm{d}\mu.$$

IV. *O funcție x, măsurabilă* $\mathfrak{A}$, *este integrabilă* (μ) *dacă și numai dacă* $|x|$ *este integrabilă* (μ).

În adevăr, dacă x este integrabilă (μ), atunci x^+ și x^- sînt integrabile (μ), deci $|x| = x^+ + x^-$ este integrabilă (μ).

Reciproc, dacă $|x|$ este integrabilă (μ), din inegalitățile evidente $x^+ \leqq |x|$, $x^- \leqq |x|$ rezultă că funcțiile *pozitive* x^+, x^- au integrală *finită*, deci x este integrabilă (μ).

V. *Dacă x și y sînt integrabile* (μ), *atunci* $x \leqq y$ *implică*

$$\int x\mathrm{d}\mu \leqq \int y\mathrm{d}\mu.$$

Este suficient să punem $z = y - x$, de unde $y = x + z$. Cum $z = y + (-x)$ este integrabilă și $z \geqq 0$, avem

$$\int y\mathrm{d}\mu = \int x\mathrm{d}\mu + \int z\mathrm{d}\mu \geqq \int x\mathrm{d}\mu.$$

VI. Dacă x este integrabilă (μ), atunci

$$\left|\int x\mathrm{d}\mu\right| \leqq \int |x|\mathrm{d}\mu.$$

[1] În sensul dat anterior. Aceasta revine la a face convenția $\infty - \infty = 0$.

În adevăr, din inegalităţile

$$x \leqq |x|, \quad -x \leqq |x|,$$

deducem

$$\int x\,d\mu \leqq \int |x|\,d\mu, \quad -\int x\,d\mu \leqq \int |x|\,d\mu,$$

de unde inegalitatea din enunţ.

Exerciţii: 1° Să se arate că dacă x este integrabilă (μ) şi $T = E \cup F$ constituie o partiţie a spaţiului T în elemente din $\mathcal{A}$, atunci

$$\int x\,d\mu = \int_E x\,d\mu + \int_F x\,d\mu.$$

R: Se va ţine seama de semnificaţia integralelor din membrul III şi se va aplica propoziţia II.

2° Să se arate că dacă $E \in \mathcal{A}$ şi $\mu(E) = 0$, atunci integrala $\int_E x\,d\mu$ are sens pentru orice funcţie măsurabilă (μ) şi este nulă.

R: Dacă $\{x_n\}$ este şirul de funcţii etajate pe $(\mathcal{A})$, *asociat* lui x, atunci şirul $\{x_n\chi_{E_n}\}$ este asociat funcţiei $x\chi_E$. Se va aplica propoziţia I.

3° Să se arate că dacă x este integrabilă (μ), atunci mulţimea

$$\{t : x(t) = \pm\infty\}$$

este de măsură nulă. (Altfel spus: *O funcţie integrabilă* (μ) *este a.p.* (μ) *finită.*)

R: Fie, de exemplu,

$$E_1 = \{t : x(t) = +\infty\}.$$

Dacă $\{x_n\}$ este şirul de funcţii etajate pe $\mathcal{A}$, asociat lui x, atunci pentru orice puncte $t \in E_1$ avem $x_n(t) = n$. Deducem

$$\int x\,d\mu = \int_{\mathbf{C}E_1} x\,d\mu + \int_{E_1} x\,d\mu \geqq \int_{\mathbf{C}E_1} x\,d\mu + n\cdot\mu(E_1).$$

Cum primul membru este *finit* şi independent de n, rezultă că $\mu(E_1) = 0$.

§ 3. TEOREMA LUI LEBESGUE–BEPPO LEVI

7.3.1. Toate proprietăţile importante ale integralei pe care am definit-o în paragraful precedent pot fi deduse din următoarea teoremă, descoperită independent de H. Lebesgue şi Beppo Levi.

Scanned with OKEN Scanner

Teoremă: *Dacă* $\{x_n\}$ *este un șir de funcții pozitive, măsurabile* (μ) *și dacă punem, pentru fiecare* $t \in T$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) = x(t),$$

atunci

$$\int x \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int x_n \, \mathrm{d}\mu$$

În adevăr, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqq x,$$

oricare ar fi p, de unde

$$\int \left(\sum_{n=1}^{p} x_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{p} \int x_n \, \mathrm{d}\mu \leqq \int x \mathrm{d}\mu,$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int x_n \, \mathrm{d}\mu \leqq \int x \, \mathrm{d}\mu.$$

Pentru a stabili inegalitatea opusă, și o dată cu această teorema enunțată, vom considera șirul $\{x_{n,m}\}_{n \in N}$ de funcții etajate pe $\mathfrak{A}$, asociat funcției x_n.

Acest șir este crescător și pozitiv. Să punem, pentru m dat,

$$\sum_{n=1}^{m} x_{n,m} = y_m.$$

Șirul $\{y_m\}$ este un șir crescător de funcții etajate pe $\mathfrak{A}$, pozitive. În adevăr

$$y_{m+1} = \sum_{n-1}^{m+1} x_{n,m+1} = \sum_{n=1}^{m} x_{n,m+1} + x_{m+1,\,m+1} \leqq \sum_{n=1}^{m} x_{n,m} + x_{m+1,\,m+1} \geqq y_m.$$

Pentru $p < m$ avem

$$\sum_{n=1}^{p} x_{n,m} \leqq \sum_{n=1}^{m} x_{n,m} = y_m \leqq \sum_{n=1}^{m} x_n \leqq x,$$

de unde, făcînd $m \to \infty$,

$$\sum_{n=1}^{p} x_n \leqq \lim y_m \leqq x.$$

Cum p este arbitrar, deducem

$$\lim y_m = x.$$

Putem deci scrie

$$\int x\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\int y_m\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\int x_{n,m}\,d\mu \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\int x_n\,d\mu.$$

Observaţie importantă. O formă echivalentă, foarte frecvent utilizată, a teoremei precedente este următoarea:

Dacă $\{u_n\}_{n\in N}$ *este un şir crescător de funcţii pozitive, măsurabile* $\mathcal{A}$, *atunci*

$$\lim\int u_n\,d\mu = \int(\lim u_n)\,d\mu.$$

În adevăr, este suficient să punem[1], pentru orice $t \in T$, $x_1(t) = u_1(t)$, $x_{n+1}(t) = u_{n+1}(t) - u_n(t)$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

de unde

$$\int(\lim u_n)\,d\mu = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_a\right)d\mu. \tag{1}$$

Dacă

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int x_n\,d\mu,$$

atunci

$$\int(\lim u_n)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int u_n\,d\mu - \int u_{n-1}\,d\mu\right) = \lim_{n\to\infty}\int u_n\,d\mu.$$

Dacă

$$\int(\lim u_n)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int u_n d\mu,$$

atunci

$$\int(\Sigma\, x_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\left(\sum_{K=1}^{n} x_K\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{K=1}^{n}\int x_K\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int x_n\,d\mu.$$

Cu aceasta, echivalenţa celor două propoziţii este complet stabilită.

[1] Cu convenţia de calcul $\infty - \infty = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

7.3.2. O aplicaţie importantă a teoremei precedente o constituie următoarea proprietate:

Teorema de aditivitate numerabilă: Dacă

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

constituie o partiţie a spaţiului T *în mulţimi din* $\mathcal{A}$ *şi dacă* x *este o funcţie pentru care*

$$\int x \, d\mu$$

are sens, atunci

$$\int x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} x \, d\mu.$$

Deoarece, prin definiţie,

$$\int x \, d\mu = \int x^+ \, d\mu - \int x^- \, d\mu,$$

este suficient să presupunem de la început, fără a micşora prin aceasta valabilitatea raţionamentului, că $x \geqq 0$.

Să punem, în aceste condiţii,

$$x_n = x \cdot \chi_{E_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Funcţiile x_n sînt pozitive şi avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x,$$

de unde

$$\int x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int x_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int x \cdot \chi_E \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} x \, d\mu.$$

§ 4. LEMA LUI FATOU. CRITERIUL LUI LEBESGUE. DEFINIŢIA LUI S. SAKS

7.4.1. În varianta sa secundă, teorema lui Lebesgue-Beppo Levi a dat un răspuns parţial la problema permutabilităţii celor două operaţii lineare: trecerea la limită şi integrarea.

Aceeaşi teoremă ne va permite să aprofundăm mai mult această problemă. Vom începe prin a stabili

Lema lui Fatou. *Dacă* $\{x_n\}_{n\in N}$ *este un şir de funcţii pozitive, măsurabile* $(\mathfrak{A})$, *atunci*

$$\int (\liminf x_n)\, d\mu \leqq \liminf \int x_n\, d\mu.$$

În adevăr, să punem

$$y_n = \inf \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Şirul $\{y_n\}$ este crescător şi avem

$$y_n \leqq x_n, \quad \lim y_n = \liminf x_n,$$

de unde, aplicînd teorema lui Lebesgue-Beppo Levi,

$$\int (\liminf x_n)\, d\mu = \int \lim y_n\, d\mu = \lim \int y_n\, d\mu \leqq \liminf \int x_n\, d\mu.$$

Cu ajutorul lemei lui Fatou, putem stabili cu uşurinţă

Teorema lui Lebesgue. *Dacă* $\{x_n\}_{n\in N}$ *este un şir de funcţii măsurabile* $(\mathfrak{A})$ *egal majorate în modul*[1] *de o funcţie pozitivă* z, *integrabilă* (μ), *atunci*

$$\int (\liminf x_n)\, d\mu \leqq \liminf \int x_n d\mu \leqq$$

$$\leqq \limsup \int x_n\, d\mu \leqq \int (\limsup x_n)\, d\mu.$$

Putem suprima din spaţiul T punctele t (dacă există) pentru care $z(t) = +\infty$, deoarece măsura mulţimii acestor puncte este nulă. Aceasta revine la a presupune de la început că z este o funcţie finită.

Avem $z + x_n \geqq 0$, oricare ar fi n. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \inf\ (z + x_n) = z + \lim_{n\to\infty} \inf x_n.$$

Aplicînd deci lema lui Fatou, obţinem

$$\int (z + \liminf x_n)\, d\mu \leqq \liminf \int (z + x_n)\, d\mu =$$

$$= \int z\, d\mu + \liminf \int x_n\, d\mu,$$

de unde

$$\int (\liminf x_n)\, d\mu \leqq \liminf \int x_n\, d\mu,$$

deoarece $\int z\, d\mu$ este *finită*.

---

[1] sau, cu o expresie frecvent utilizată în unele monografii recente: „egal dominate"

Scanned with OKEN Scanner

În același mod se stabilește și ultima inegalitate. Din teorema precedentă deducem imediat:

Criteriul lui Lebesgue: *Dacă* $\{x_n\}_{n\in N}$ *este un șir convergent de funcții măsurabile* $(\mathfrak{A})$, *egal majorate în modul de o functie integrabilă* (μ), *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int x_n \, d\mu = \int (\lim_{n\to\infty} x_n) \, d\mu.$$

Acest criteriu de permutabilitate este cunoscut sub numele de „marea teoremă" a lui Lebesgue.

7.4.2. Vom arăta că, în cazul particular al unui spațiu T de măsură (μ) finită, criteriul clasic de permutabilitate în care intervine convergența uniformă, așa cum este enunțat în elementele de analiză, apare ca un caz particular al teoremei precedente a lui Lebesgue. Enunțul teoremei pe care voim să o stabilim este următorul

Teoremă: *Dacă* $\mu(T) < \infty$ *și dacă șirul* $\{x_n\}_{n\in N}$ *de funcții integrabile* (μ) *finite, converge uniform pe* T, *atunci funcția* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *este integrabilă* (μ), *și avem*

$$\int x \, d\mu = \lim \int x_n \, d\mu.$$

În adevăr, din ipoteză rezultă că există un număr natural n_0, astfel încît să avem, pentru $n > n_0$,

$$|x_n(t) - x_{n_0}(t)| < 1,$$

oricare ar fi $t \in T$. Deducem

$$x_{n_0}(t) - 1 < x_n(t) < x_{n_0}(t) + 1.$$

Deoarece $\mu(T) < \infty$, funcțiile $x_{n_0}(t) - 1$ și $x_{n_0}(t) + 1$ sînt integrabile (μ). Deci și funcția

$$z = \max\{|x_{n_0} - 1|, \ |x_{n_0} + 1|\}$$

este integrabilă (μ). Din dubla inegalitate precedentă rezultă că funcțiile șirului

$$x_{n_0+1}, \ x_{n_0+2}, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots$$

sînt egal majorate, în valoare absolută, de funcția z. Deci, în baza criteriului lui Lebesgue,

$$\int (\lim x_n) \, d\mu = \lim \int x_n \, d\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.4.3. Se datorește lui S. Saks un mod de definire a integralei asemănător modului în care este definită integrala lui Riemann:

Teoremă: *Fie* $T = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ *o partiție finită a spațiului* T *în mulțimi din* $\mathfrak{A}$ *și* $v_k = \inf_{t \in E_k} x(t)$, *unde* x *este o funcție măsurabilă* $(\mathfrak{A})$ *pozitivă.*

Fie, de asemenea, pentru partiția d *considerată,*

$$s_d = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \mu(E_k).$$

Atunci

$$\int x \, d\mu = \sup_{d \in \mathfrak{D}} \{s_d\},$$

unde $\mathfrak{D}$ *este familia partițiilor finite ale lui* T *în mulțimi din* $\mathfrak{A}$.

În adevăr, să punem

$$\int' x d\mu = \sup_{d \in \mathfrak{D}} \{s_d\}.$$

Există un șir $\{d_p\}$ de partiții *finite* ale lui T, cu șirul corespunzător $\{s_p\}$ definit de

$$s_p = \sum_{k=1}^{n_p} v_k^p \mu(E_k^p),$$

astfel încît

$$\lim_{p \to \infty} s_p = \int' x \, d\mu.$$

Să considerăm șirul $\{y_p\}$ de funcții etajate pe $\mathfrak{A}$, definite astfel:

$$y_p = \sum_{k=1}^{n_p} v_k^p \chi_{E_k^p}.$$

Evident, $y_p \leqq x$, oricare ar fi p, deci

$$\int' x d\mu = \lim_{p \to \infty} s_p = \lim_{p \to \infty} \int y_p \, d\mu < \int x d\mu.$$

Pe de altă parte, dacă $\{x_n\}_{n \in N}$ este șirul de funcții etajate pe $\mathfrak{A}$, *asociat* funcției x, integrala

$$\int x_n d\mu$$

este, în mod vizibil, o sumă de tipul s_d.

Scanned with OKEN Scanner

Deci șirul crescător

$$\left\{\int x_n \mathrm{d}\mu\right\}$$

este o parte a mulțimii $\{s_d\}_{d\in\mathfrak{D}}$.

De aici rezultă că

$$\sup\left\{\int x_n \mathrm{d}\mu\right\} = \lim \int x_n \mathrm{d}\mu = \int x \mathrm{d}\mu \leqq \sup_{d\in\mathfrak{D}}\{s_d\} = \int' x \mathrm{d}\mu,$$

de unde

$$\int' x \mathrm{d}\mu = \int x \mathrm{d}\mu. \quad .$$

O b s e r v a ț i e. O dată integrala unei funcții pozitive definită, pentru o funcție de semn oarecare se va defini integrala (în cazul în care există) ca mai sus (**7.2.3.**).

§ 5. FUNCȚII ABSOLUT CONTINUE DE MULȚIME. TEOREMA LUI HAHN. TEOREMA LUI LEBESGUE-NIKODYM

7.5.1. Prin definiție, o funcție $\sigma : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ este absolut continuă în raport cu măsura μ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\eta > 0$ astfel încît $E \in \mathcal{A}$ și $\mu(E) < \eta$ să implice $|\sigma(E)| < \varepsilon$.

O funcție $\sigma : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ este, prin definiție, *numerabil aditivă* dacă:

1° pentru orice șir $\{E_n\}_{n\in N}$ de mulțimi *disjuncte* din $\mathcal{A}$, suma $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(E_n)$ are sens și avem

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(E_n);$$

2° $\sigma(\emptyset) = 0$.

După cum se vede, o funcție reală, numerabil aditivă de mulțime, posedă toate proprietățile unei măsuri, afară de aceea de a fi pozitivă. Din acest motiv, o astfel de funcție se mai numește și o *măsură reală*. Măsura studiată pînă în prezent poate fi numită o *măsură pozitivă*.

Exemplu. Fie x o funcție integrabilă (μ).

Aplicaţia $\sigma : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ definită, pentru fiecare $E \in \mathcal{A}$, de egalitatea

$$\sigma(E) = \int_E x \mathrm{d}\mu$$

constituie, în baza teoremei de aditivitate numerabilă din 7.3.2., o măsură reală.

În adevăr, dacă $E = \bigcup E_n$, cu $E_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, mulţimile E_n fiind disjuncte, avem

$$\int_{E_n} x \mathrm{d}\mu = \int x_n \mathrm{d}\mu,$$

cu $x_n = x\chi_{E_n}$ de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} x \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int x_n \mathrm{d}\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) \mathrm{d}\mu = \int x \cdot \chi_E \mathrm{d}\mu = \int_E x \mathrm{d}\mu.$$

O funcţie $\nu : T \to \overline{\mathbf{R}}$, numerabil aditivă, este σ-finită dacă există o partiţie $T = \bigcup_{n \in N} E_n$ în mulţimi din $\mathcal{A}$, astfel încît să avem

$$|\nu(E_n)| < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Teorema ce urmează ne dă un exemplu de funcţie numerabil aditivă de mulţime care este absolut continuă în raport cu măsura μ.

Teoremă (Lebesgue, Vitali). *Dacă x este o funcţie integrabilă* (μ), *atunci*

$$\nu(E) = \int_E x \mathrm{d}\mu$$

este o funcţie absolută continuă de mulţime (în raport cu μ).

Ca şi în **7.3.2.**, este suficient să ne limităm la cazul $x \geqq 0$. În acest caz, ν defineşte o *măsură* pe $\mathcal{A}$.

Să presupunem că ν nu ar fi absolut continuă. Atunci ar exista un număr pozitiv ε_0, astfel încît, *oricare ar fi* $\eta > 0$, ar exista o mulţime $E_\eta \in \mathcal{A}$ cu proprietăţile

$$\mu(E_\eta) < \eta \text{ şi } \nu(E_\eta) \geqq \varepsilon_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm $\eta = \frac{1}{2^n}$ şi să presupunem $E_\eta = E_r$.

Dacă

$$E_0 = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n,$$

atunci

$$\nu(E_0) \leqq \nu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leqq \sum_{n=m}^{\infty} \nu(E_n) \leqq \frac{1}{2^{m-1}},$$

oricare ar fi m natural. Deci $\nu(E_0) = 0$.

Pe de altă parte, dintr-o proprietate stabilită anterior (**6.5.3.**, ex. 2°), deducem

$$0 < \varepsilon_0 \leqq \limsup_{n\to\infty} \nu(E_n) \leqq \nu(E_0) = 0.$$

Contradicţia obţinută demonstrează teorema.

Observaţie. Dacă x este o funcţie integrabilă (μ), funcţia de mulţime

$$\nu(E) = \int_E x\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{A},$$

se mai numeşte o integrală *nedefinită*.

7.5.2. Teorema precedentă ridică o problemă naturală: dacă $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ este o măsură reală, absolut continuă în raport cu μ, este ν o integrală nedefinită?

Răspunsul este afirmativ. Justificarea sa cere însă unele pregătiri. Vom începe cu o definiţie: Pentru orice elemente $E \in \mathcal{A}$ vom pune

$$V^+(\nu; E) = \sup\{\nu(A) : A \subseteq E\},$$

$$V^-(\nu; E) = -\inf\{\nu(A) : A \subseteq E\}.$$

Aceste funcţii de mulţime, ataşate funcţiei ν, se numesc respectiv *variaţia pozitivă* şi *variaţia negativă* a lui ν, pentru elementul $E \in \mathcal{A}$.

Funcţia

$$V(\nu; E)^+ = V^+(\nu; E) + V^-(\nu; E)$$

se numeşte *variaţia totală* a lui ν pentru elementul $E \in \mathcal{A}$.

Din $\emptyset \in \mathcal{A}$ şi $\emptyset \subseteq E$, deducem imediat că $V^+(\nu; E) \geqq 0$, $V^-(\nu; E) \geqq 0$, oricare ar fi $E \in \mathcal{A}$. Deci $V(\nu; E) \geqq 0$, oricare ar fi $E \in \mathcal{A}$.

Teorema I. *Dacă ν este numerabil aditivă, atunci $V^+(\nu; *)$ şi $V^-(\nu; *)$ sînt numerabil aditive.*

Deoarece

$$V^-(\nu; E) = \sup\{-\nu(A) : A \subseteq E\}, \tag{1}$$

rezultă că este suficient să stabilim teorema pentru $V^+(\nu; E)$.

Vom arăta, în primul rînd, că $V^+(\nu; E)$ este aditivă. În adevăr, fie E, F două mulţimi disjuncte din $\mathcal{A}$. Dacă $A \in \mathcal{A}$ şi $A \subseteq E \cup F$, atunci

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap F) \geqq V^+(\nu; E) + V^+(\nu; F),$$

de unde

$$V^+(\nu; E \cup F) \leqq V^+(\nu; E) + V^+(\nu; F).$$

Pentru stabilirea inegalităţii opuse, să observăm că pentru $\varepsilon > 0$, altfel arbitrar, există $A_\varepsilon \subseteq E$ şi $B_\varepsilon \subseteq F$, astfel încît

$$\nu(A_\varepsilon) > V^+(\nu; E) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \nu(B_\varepsilon) > V^+(\nu; F) - \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde

$$V^+(\nu; E \cup F) \geqq \nu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) > V^+(\nu; E) + V^+(\nu; F) - \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, deducem, în definitiv

$$V^+(\nu; E) + V^+(\nu; F) = V^+(\nu; E \cup F).$$

Prin recurenţă, proprietatea de aditivitate demonstrată se extinde la un număr oarecare finit de mulţimi.

Să considerăm acum un şir *infinit* $\{E_n\}$ de mulţimi *disjuncte* din $\mathcal{A}$ şi să punem $H_p = \bigcup_{n=1}^{p} E_n$.

În baza aditivității finite avem

$$V^+(\nu\,;\,H_p) = \sum_{n=1}^{p} V^+(\nu\,;\,E_n).$$

Șirul $\{H_p\}_{p\in N}$ este ascendent. Deci (**6.5.3.**, teorema II)

$$\lim V^+(\nu\,;\,H_p) = V^+(\nu\,;\lim H_p),$$

adică

$$V^+(\nu\,;\bigcup_{n\in N} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} V^+(\nu\,;\,E_n).$$

Teorema II. *Dacă* $\nu : \mathcal{A} \to \overline{R}$ *este numerabil aditivă, atunci pentru orice element* $E \in \mathcal{A}$ *pentru care* $\nu(E) < +\infty$ *avem* $V^+(\nu\,;\,E) < \infty$.

Vom arăta că $V^+(\nu\,;\,E) = +\infty$ implică $\nu(E) = +\infty$. Din ipoteza făcută rezultă că există o mulțime $E_1 \subseteq E$, cu $E_1 \in \mathcal{A}$, astfel încît $\nu(E_1) \to 0$.

Dar

$$V^+(\nu\,;\,E) = V^+(\nu\,;\,E_1) + V^+(\nu\,;\,E - E_1),$$

deci cel puțin unul din termenii din membrul II este egal cu $+\infty$. Vom nota cu A_1 una din mulțimile E_1, $E - E_1$, pentru care $V^+(\nu\,;\,A) = \infty$.

Din ultima egalitate deducem existența unei mulțimi $E_2 \in \mathcal{A}$, cu $E_2 \subseteq A_1$, astfel încît $\nu(E_2) > 2$. Ca mai sus, rezultă că pentru cel puțin una din mulțimile E_2, $A_1 - E_2$, fie A_2 acea mulțime, avem $V^+(\nu\,;\,A_2) = +\infty$.

Procedeul poate fi continuat, obținînd șirurile

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \ldots$$

$$E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, \ldots$$

astfel încît

$$A_k = A_{k-1} - E, \text{ sau } A_k = E_k,$$

apoi

$$V^+(\nu\,;\,A_k) = +\infty, \quad \nu(E_k) > k.$$

Se pot întîmpla două cazuri:

1° Există un număr natural n_0, astfel încît pentru $n > n_0$ avem $A_n = E_n$. Cum șirul $\{E_n\}$ este descendent, dacă există un indice $n > n_0$ pentru care $\nu(E_n) < \infty$, atunci (**6.5.3.**, teorema III)

$$\nu(\lim E_n) = \lim \nu(E_n) > \lim n = +\infty.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar

$$\lim E_n = \bigcap_{n \in N} E_n \subseteq E,$$

deci cu atît mai mult $\nu(E) = +\infty$.

2° Dacă ipoteza precedentă nu este verificată, atunci există un şir $\{n_k\}$ de numere naturale pentru care

$$A_{n_k} = A_{n_k - 1} - E_{n_k}.$$

Cum şirul $\{A_n\}$ este descendent, iar $E_{n_{k+1}} \subseteq A_{n_k}$ şi $E_{n_k} \cap A_{n_k} = \emptyset$, rezultă că $E_{n_{k+1}} E_{n_k} = \emptyset$.

Deci mulţimile $\{E_{n_k}\}$ sînt disjuncte. Deducem

$$\nu\left(\bigcup_{k \in N} E_{n_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_{n_k}) \geqq \sum_{k=1}^{\infty} n_k = +\infty,$$

de unde, ţinînd seama că $E \supseteq \bigcup_{k \in N} E_{n_k}$, deducem, cu atît mai mult, $\nu(E) = +\infty$.

Corolarii: 1) *Dacă* $\nu(E) > -\infty$, *atunci* $V^-(\nu; E) < \infty$.
2) *Dacă* $\nu(E)$ *este finită, atunci* $V^+(\nu; E)$ *şi* $V^-(\nu; E)$ *sînt finite.*

Teorema de descompunere a lui C. Jordan. *Pentru orice funcţie* $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$, *numerabil aditivă, avem, oricare ar fi* $E \in \mathcal{A}$,

$$\nu(E) = V^+(\nu; E) - V^-(\nu; E).$$

Să observăm că membrul II al acestei relaţii are totdeauna un sens. Într-adevăr, dacă $V^+(\nu; E) = +\infty$, atunci $V^-(\nu; E) < \infty$ şi relaţia precedentă este verificată.

Dacă $V^-(\nu; E) = +\infty$, atunci $V^+(\nu; E) < \infty$ şi relaţia precedentă este iarăşi verificată.

Rămîne să studiem cazurile în care V^+, V^- sînt finite, deci ν finită.

Fie $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{A}$. Avem

$$\begin{aligned} \nu(A) = \nu(E) - \nu(E - A) &\leqq \nu(E) + V^-(\nu; E), \\ &\geqq \nu(E) - V^+(\nu; E), \end{aligned}$$

de unde

$$V^+(E) \leqq \nu(E) + V^-(\nu; E),$$

$$V^-(E) \leqq -\nu(E) + V^+(\nu; E),$$

şi relaţia din enunţ este iarăşi stabilită.

7.5.3. Teorema lui Jordan afirmă, în fapt, că orice măsură reală ν este diferenţa a două măsuri *pozitive*. Punînd, pentru simplificare,

$$V^+(\nu; E) = \nu_1(E), \; V^-(\nu; E) = \nu_2(E),$$

avem

$$\nu(E) = \nu_1(E) - \nu_2(E).$$

Cum măsurile ν_1, ν_2 sînt definite pe $\mathcal{A}$, rezultă că putem defini, pentru o funcţie x măsurabilă $(\mathcal{A})$, integralele

$$\int x \, d\nu_1, \quad \int x \, d\nu_2,$$

în felul obişnuit. Dacă fiecare din aceste integrale are un sens, atunci vom pune, prin definiţie

$$\int x \, d\nu = \int x \, d\nu_1 - \int x \, d\nu_2.$$

Integrala astfel definită se bucură de toate proprietăţile integralei în raport cu o măsură pozitivă: omogeneitatea, linearitatea, aditivitatea numerabilă ca funcţie de mulţime, proprietatea de permutabilitate exprimată de criteriul lui Lebesgue. Lăsăm cititorului verificarea acestor proprietăţi, ca exerciţii.

7.5.4. Teorema lui Jordan ne va permite să demonstrăm cu uşurinţă

Teorema de descompunere a lui Hahn. *Fie* $\nu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ *o funcţie numerabil aditivă, care evită una din valorile* $-\infty$, *sau* $+\infty$. *Există o partiţie* $T = A \cup B$ *astfel încît*

$$\nu(E) \geqq 0, \text{ dacă } E \subseteq A,$$

$$\nu(E) \leqq 0. \text{ dacă } E \subseteq B.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem, de exemplu, că

$$-\infty \leqq \nu < \infty.$$

Atunci știm că $V^+(\nu; E) < \infty$, oricare ar fi $E \in \mathcal{A}$. Numărului natural n îi corespunde, în baza definiției funcției V^+, o mulțime $E_n \in \mathcal{A}$, astfel încît

$$\nu(E_n) > V^+(\nu; T) - \frac{1}{2^n}.$$

Deducem

$$V^-(\nu; E_n) < \frac{1}{2^n},$$

iar din egalitatea

$$V^+(\nu; T) = V^+(\nu; T - E_n) + V^+(\nu; E_n)$$

și din inegalitatea

$$V^+(\nu; E_n) \geqq \nu(E_n)$$

deducem

$$V^+(\nu; T - E_n) < V^+(\nu; T) - \nu(E_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Să punem

$$A = \liminf E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n.$$

Atunci

$$B = \mathbf{C}A = \limsup \mathbf{C}E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (\mathbf{C}E_n) \subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathbf{C}(E_n),$$

de unde

$$V^+(\nu; B) \leqq \sum_{n=m}^{\infty} V^+(\nu; \mathbf{C}E_n) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Cum numărul natural m este arbitrar, deducem

$$V^+(\nu; B) = 0.$$

În mod analog găsim

$$V^-(\nu; A) = 0.$$

Cu aceasta, teorema este demonstrată, căci pentru orice mulțime $E \subseteq A$ avem

$$-\nu(E) \leqq V^-(\nu\,;E) \leqq V^-(\nu\,;A) = 0,$$

iar pentru orice mulțime $E \subseteq B$ avem

$$\nu(E) \leqq V^+(\nu\,;E) \leqq V^+(\nu\,;B) = 0.$$

Observație: Partiția $T = A \cup B$ construită mai sus se numește o *partiție a lui Hahn*. Mulțimea A se numește *mulțimea pozitivă a partiției* pentru funcția ν.

7.5.5. Înainte de a răspunde la problema pusă în **7.5.2.**, vom stabili următoarea

Lemă: (K. Yosida): *Fie μ și ν două măsuri pe $\mathcal{A}$. Dacă ν este absolut continuă în raport cu μ, există un număr pozitiv k și o mulțime A, de măsură μ strict pozitivă, astfel încît $T = A \cup \mathbf{C}A$ constituie o partiție a lui Hahn pentru funcția numerabil aditivă $\varphi = \nu - k\mu$, în care A este mulțimea pozitivă pentru această funcție.*

Să punem, în adevăr, pentru orice număr natural n

$$\varphi_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$$

și să notăm cu (A_n, B_n) mulțimile partiției lui Hahn pentru φ_n.

Dacă

$$A_0 = \bigcup_{n\in N} A_n,\quad B_0 = \mathbf{C}A_0 = \bigcap_{n\in N} B_n,$$

atunci

$$\varphi_n\,(B_0) \geqq \varphi_n(B_n) \geqq 0,$$

adică

$$\frac{1}{n}\,\mu(B_0) \geqq \nu(B_0) \geqq 0,$$

deci $\nu(B_0) = 0$. Prin urmare $\nu(A_0) > 0$, de unde, ν fiind absolut continuă în raport cu ν, deducem $\mu(A_0) > 0$, adică

$$0 < \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\,(A_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Există deci un număr natural m, pentru care

$$\mu(A_m) > 0.$$

Va fi suficient să luăm $k = \frac{1}{m}$, $A = A_m$.

7.5.6. Sîntem acum în măsură să stabilim rezultatul care rezolvă problema pusă mai sus:

Teorema lui Lebesgue-Nikodym. *Dacă spațiul T este de măsură μ σ-finită, atunci oricărei funcții numerabil aditive ν, definite pe $\mathcal{A}$, σ-finite, absolut continue în raport cu μ, îi corespunde în mod unic a. p. (μ) o aplicație $x : T \to \overline{\mathbf{R}}_+$, astfel încît să avem*

$$\nu(E) = \int_E x(t)\,d\mu,$$

pentru orice $E \in \mathcal{A}$.

Prin ipoteză, există o partiție numerabilă a spațiului T

$$T = \bigcup_{k \in N} T_k,$$

astfel încît

$$\mu(T_k) < \infty, \quad |\nu(T_k)| < \infty, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Putem deci presupune, în baza proprietății de aditivitate numerabilă a integralei, că avem de la început

$$\mu(T) < \infty, \qquad |\nu(T_k)| < \infty.$$

Pe de altă parte, în baza teoremei de descompunere a lui Jordan, avem, pentru orice $E \in \mathcal{A}$,

$$\nu(E) = \nu_1(E) - \nu_2(E),$$

unde ν_1, ν_2 sînt măsuri.

Putem deci stabili teorema în cazul în care ν este o măsură.

Să notăm cu $\mathcal{C}$ clasa tuturor funcțiilor integrabile (μ), pozitive, pentru care

$$\int_E z\,d\mu \leqq \nu(E),$$

Scanned with OKEN Scanner

oricare ar fi $E \in \mathcal{A}$. Să punem, de asemenea,

$$\sup \left\{ \int z \mathrm{d}\mu \ : z \in \mathcal{C} \right\} = k_0.$$

Există un şir $\{z_n\}$ de elemente din $\mathcal{C}$, pentru care

$$\lim_{n \to \infty} \int z_n \mathrm{d}\mu = k_0.$$

Fie $y_n = \sup \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ şi

$$E_i = \{t : t \in E, \quad y_n(t) = z_i(t)\},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Mulţimile E_i sînt disjuncte, aparţin lui $\mathcal{A}$ şi avem

$$E = \bigcup_{i \leqq n} E_i,$$

de unde

$$\int_E y_n \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} z_i \mathrm{d}\mu \leqq \sum_{i=1}^{n} \nu(E_i) = \nu(E).$$

Deci

$$y_n \in \mathcal{C}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Şirul $\{y_n\}_{n \in N}$ este crescător şi avem

$$\lim y_n = x,$$

unde

$$x = \sup_{n \in N} x_n.$$

În baza unei teoreme cunoscute vom avea

$$\lim \int y_n \mathrm{d}\mu = \int x \mathrm{d}\mu \leqq k_0.$$

Dar din

$$y_n \geqq x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

deducem

$$\int y_n \mathrm{d}\mu \geqq \int x_n \mathrm{d}\mu,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\lim \int y_n d\mu \geqq \lim \int x_n d\mu = k_0.$$

Aşadar

$$\lim_{n\to\infty} \int y_n d\mu = k_0,$$

adică

$$\int x d\mu = k_0.$$

Vom arăta că x este funcţia căutată.
Să punem, în adevăr,

$$\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E x d\mu.$$

Va fi suficient să arătăm că ν_0 este nulă identic pe $\mathcal{A}$. În adevăr, să observăm că ν_0 este o funcţie numerabil aditivă, absolut continuă în raport cu μ. Dacă ν_0 nu ar fi identic nulă pe $\mathcal{A}$, atunci în baza lemei precedente ar exista o constantă pozitivă k şi o mulţime $A \in \mathcal{A}$, de măsură pozitivă, astfel încît

$$\nu_0(E \cap A) \geqq k\mu(E \cap A) \geqq 0,$$

oricare ar fi $E \in \mathcal{A}$. Putem scrie această inegalitate astfel:

$$k\mu(E \cap A) \leqq \nu_0(E \cap A) = \nu(E \cap A) - \int_{E\cap A} x d\mu.$$

Să considerăm funcţia

$$y = x + k\chi_A.$$

Vom avea

$$\int_E y d\mu = \int_E x d\mu + k\mu(E \cap A) < \int_{E-A} x d\mu + \nu(E \cap A) \leqq$$

$$\leqq \nu(E \cap A) + \nu(E - A) = \nu(E).$$

Deci $y \in \mathcal{C}$. Pe de altă parte,

$$\int y d\mu = \int x d\mu + k\mu(A) > k_0,$$

deci $y \notin \mathcal{C}$. Contradicţia obţinută ne arată că $\nu_0(E) = 0$, oricare ar fi $E \in \mathcal{A}$.

Scanned with OKEN Scanner

Unicitatea funcţiei x se stabileşte imediat.
Fie, în adevăr, x', x'', două funcţii pozitive integrabile (μ), astfel încît, pentru orice $E \in \mathcal{A}$, să avem

$$\nu(E) = \int_E x' d\mu, \qquad \nu(E) = \int_E x'' d\mu.$$

Deducem

$$\int_E (x' - x'') d\mu = 0,$$

oricare ar fi $E \in \mathcal{A}$, deci $x' = x''$, a. p. (μ).

O b s e r v a ţ i e. 1° Importanţa teoremei lui Lebesgue-Nikodym stă în faptul că teorema afirmă identitatea între familia integralelor nedefinite ale funcţiilor reale integrabile (μ) şi familia funcţiilor numerabil aditive, absolut continue în raport cu μ.

2° Din confruntarea teoremei lui Lebesgue-Vitali cu teorema lui Lebesgue-Nikodym rezultă că o funcţie numerabil aditivă de mulţime $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbf{R}}$ este absolut continuă în raport cu μ dacă şi numai dacă $\mu(E) = 0$, implică $\nu(E) = 0$. Vom utiliza mai tîrziu această observaţie.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

CONSTRUCȚIA UNEI MĂSURI

§ 1. MĂSURA EXTERIOARĂ

8.1.1. În capitolul precedent am presupus că o anumită măsură μ este definită pe un clan borelian $\mathcal{A}$ de părți ale spațiului T.

În acest capitol vom arăta cum, de la o funcție reală, definită pe $\mathfrak{Z}(T)$, cu anumite proprietăți, putem deduce simultan un clan borelian $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{Z}(T)$ și o măsură definită pe $\mathcal{A}$.

Să punem, pentru ușurință, $\mathcal{H} = \mathfrak{Z}(T)$.

Vom defini o funcție $\mu^* : \mathcal{H} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ cu următoarele proprietăți:

1° este numerabil subadditivă;

2° este monotonă;

3° $\mu^*(\emptyset) = 0$.

O funcție de mulțime cu aceste proprietăți va fi numită o *măsură exterioară*.

8.1.2. *Exemple de măsuri exterioare*: 1° Să considerăm, ca prim exemplu, cazul $T = \mathbf{R}$. Fie $\mathcal{J}$ familia intervalelor q-dimensionale ale spațiului $\mathbf{R}^q$. Pentru fiecare mulțime $E \subseteq \mathbf{R}^q$ vom pune

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) : \bigcup_{n \in N} I_n \supseteq E, \quad I_n \in \mathcal{J} \right\},$$

unde $\mu(I_n)$ este măsura, în sensul geometriei elementare, a intervalului I_n

Să verificăm că funcția de mulțime astfel definită este o măsură exterioară. Este suficient să verificăm subaditivitatea numerabilă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\{E_n\}_{n\in N}$ un șir de mulțimi. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, există o familie numerabilă $\{I_m^n\}_{m\in N}$ de intervale q-dimensionale, astfel încît

$$\bigcup_{m\in N} I_m^n \supseteq E_n$$

și

$$\mu^*(E_n) \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(I_m^n) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu\,(I_m^n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Cum

$$\bigcup_{u\in N}\bigcup_{m\in N} I_m^n \supseteq \bigcup_{n\in N} E_n,$$

rezultă, în baza definiției lui μ^*,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in N} E_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu\,(I_m^n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

de unde, ε fiind arbitrar

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in N} E_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\,(E_n).$$

Observație. Măsura exterioară definită mai sus se numește *măsura exterioară a lui Lebesgue.*

2° Să considerăm spațiul $T = \mathbf{R}$. Fie x o funcție reală, continuă, strict crescătoare, definită pe $\mathbf{R}$. Vom pune

$$\mu[(a,\ b)] = f(b) - f(a).$$

Pentru orice mulțime $E \subset \mathbf{R}$ vom pune

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu\,(I_n) : \bigcup_{n\in N} I_n \supseteq E,\ I_n \in \mathcal{J}\right\}.$$

Demonstrația pentru stabilirea subadităţii numerabile a acestei funcții se face ca în primul exemplu.

§ 2. MULȚIMI MĂSURABILE. MĂSURA CA RESTRICȚIE A MĂSURII EXTERIOARE

8.2.1. Fiind dat un spațiu T și o măsură exterioară $\mu^*: \mathcal{H} \to \mathbf{R}_+$, vom spune, după C. Carathéodory, că o mulțime $E \subseteq T$ este măsurabilă (μ^*) dacă

$$\forall\, H \subseteq T : \mu^*(H) = \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap \complement E).$$

Să observăm că, oricare ar fi E și H, din egalitatea

$$H = (H \cap E) \cup (H \cap \complement E)$$

deducem

$$\mu^*(H) \leqq \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap \complement E).$$

Pentru a demonstra deci că o mulțime E este măsurabilă (μ^*), va fi suficient să arătăm că

$$\forall\, H \subseteq T : \mu^*(H) \geqq \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap \complement E).$$

Cu această definiție putem enunța următoarea

Teoremă: *Familia $\mathcal{A}$ a mulțimilor măsurabile (μ^*) este un clan borelian, iar restricția la $\mathcal{A}$ a lui μ^* este o măsură pe $\mathcal{A}$.*

Demonstrația acestui important rezultat va cuprinde mai multe etape

8.2.2. Fie $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{A}$. Deci, în primul rînd,

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap \complement E).$$

Să scriem acum că mulțimea F este măsurabilă (μ^*), utilizînd, succesiv, în loc de mulțimea H, mulțimile $H \cap E$ și $H \cap \complement E$. Obținem

$$\mu^*(H \cap E) = \mu^*(H \cap E \cap F) + \mu^*(H \cap E \cap \complement F),$$
$$\mu^*(H \cap \complement E) = \mu^*(H \cap \complement E \cap F) + \mu^*(H \cap \complement E \cap \complement F).$$

Prima egalitate devine deci

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap E \cap F) + \mu^*(H \cap E \cap \complement F) + \mu^*(H \cap \complement E \cap F) + \mu^*(H \cap \complement E \cap \complement F). \quad (1)$$

În această egalitate, valabilă pentru orice $H \subseteq T$, să înlocuim pe H prin $H \cap (E \cup F)$.

Egalitatea devine

$$\mu^*(H\cap(E\cup F)) = \mu^*(H\cap E\cap F) + \mu^*(H\cap E\cap \mathbf{C}F) + \mu^*(H\cap \mathbf{C}E\cap F), \quad (2)$$

deci (1) se poate scrie, în definitiv,

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap (E \cup F)) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}(E \cup F)),$$

ceea ce arată că $E \cup F \in \mathcal{A}$.

Prin recurenţă deducem că dacă E_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, sînt măsurabile (μ^*), atunci $\bigcup_{k\leqq n} E_k$ este măsurabilă (μ^*).

Tot în egalitatea (1) să înlocuim mulţimea H prin $H\cap\mathbf{C}(E - F) = H \cap (\mathbf{C}E \cup F)$.

Obţinem

$$\mu^*(H\cap\mathbf{C}(E-F)) = \mu^*(H\cap E\cap F) + \mu^*(H\cap\mathbf{C}E\cap F) + \mu^*(H\cap\mathbf{C}E\cap\mathbf{C}F),$$

deci (1) devine

$\mu^*(H) = \mu^*(H\cap(E-F)) + \mu^*(H\cap\mathbf{C}(E-F))$, de unde rezultă că $E - F\in\mathcal{A}$.

8.2.3. Sîntem acum în posesia tuturor elementelor pentru demonstrarea teoremei enunţate la început.

Dacă în relaţia (2) de mai sus presupunem mulţimile E, F disjuncte, relaţia devine

$$\mu^*(H\cap(E\cup F)) = \mu^*(H\cap E) + \mu^*(H\cap F).$$

Prin recurenţă obţinem, pentru un număr p de mulţimi disjuncte,

$$\mu^*(H \cap \bigcup_{n\leqq p} E_n) = \sum_{n=1}^{p} \mu^*(H\cap E_n). \quad (3)$$

Să considerăm acum un şir infinit $\{E_n\}_{n\in N}$ de mulţimi disjuncte şi să punem

$$\bigcup_{n\in N} E_n = E, \bigcup_{n\leqq p} E_n = F_p.$$

Evident, $F_p \in \mathcal{A}$, oricare ar fi p natural. Deci, pentru orice $H \in \mathcal{K}$ avem

$$\mu^*(H) = \mu^*\left(\bigcup_{n\leqq p}(H\cap E_n)\right) + \mu^*(H\cap\mathbf{C}F_p) \geqq \mu^*\left(\bigcup_{n\leqq p}(H\cap E_n)\right) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E)$$

sau, ţinînd seama de (3)

$$\mu^*(H) \geqq \sum_{n=1}^{p} \mu^*(H\cap E_n) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, pentru $p \to \infty$,

$$\mu^*(H) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(H \cap E_n) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E) \geqq \mu^*(H \cap E) + \\ + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E). \tag{4}$$

Incluziunea opusă fiind evidentă, deducem

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E). \tag{5}$$

Aşadar $E \in \mathcal{A}$.

Dacă mulţimile şirului $\{E_n\}_{n \in N}$ *nu sînt disjuncte*, atunci putem construi şirul $\{G_n\}_{n \in N}$ definit astfel:

$$G = E_1,$$
$$G_n = E_n - \bigcup_{k \leqq n-1} E_k, \quad k = 2, 3, \ldots$$

pentru care este vizibil că $G_n \in \mathcal{A}$, oricare ar fi n. Cum mulţimile G_n sînt disjuncte, iar

$$\bigcup_{n \in N} G_n = \bigcup_{n \in N} E_n,$$

rezultă că şi în acest caz avem $\bigcup E_n \in \mathcal{A}$.

Aşadar, $\mathcal{A}$ este un clan borelian.

Întorcîndu-ne la relaţia (5), din această relaţie şi din inegalitatea (4) deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(H \cap E_n) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E) = \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E).$$

Relaţia obţinută este valabilă pentru orice H. Înlocuind, în aceste condiţii, pe H prin $E = \bigcup_{n \in N} E_n$, obţinem

$$\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

deci restricţia lui μ^* la $\mathcal{A}$ este o măsură.

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. CAZUL SPAȚIILOR METRICE. MĂSURA LUI CARATHÉODORY

8.3.1. Pînă acum, spațiul T nu a fost supus nici unei condiții. Este de așteptat ca în cazul în care în T se introduce o anumită structură (de exemplu, o topologie) să obținem rezultate mai bogate.

În acest paragraf vom presupune că T este un spațiu metric, cu metrica d.

Dreapta numerică $\mathbf{R}$ este un astfel de spațiu. În acest spațiu orice mulțime deschisă G se descompune, după cum se știe, într-o reuniune cel mult numerabilă de intervale disjuncte. Fie

$$G = \bigcup_{n \in N} (a_n, b_n).$$

Este natural să definim măsura lui G prin egalitatea

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n).$$

Într-un spațiu euclidian $\mathbf{R}^q$ cu mai mult de o dimensiune, o asemenea descompunere nu mai este posibilă. Dar se poate arăta (v. ex. 1° de mai sus) că o mulțime deschisă a unui astfel de spațiu este o reuniune infinit numerabilă de intervale q-dimensionale închise. Fie

$$G = \bigcup_{n \in N} I_n.$$

O asemenea descompunere *nu mai este unică*. Dar se poate arăta că dacă

$$G = \bigcup_{n \in N} I_n, \quad G = \bigcup_{n \in N} J_n,$$

atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(J_n).$$

(A se vedea ex. 2° de mai jos.)

Și în acest caz este natural să considerăm una din cele două sume de mai sus drept *măsură* a lui G.

Rezultatul acestei scurte analize este că, în spațiile euclidiene, mulțimilor deschise li se poate atașa o măsură, cu toate proprietățile cunoscute ale acesteia.

Carathéodory și-a pus următoarea întrebare naturală: Ce condiție trebuie să îndeplinească măsura exterioară $\mu^* : \mathcal{H} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ pentru ca mulțimile

deschise ale unui spațiu euclidian să fie măsurabile (μ^*)? Raționamentul făcut de el în cazul unui spațiu euclidian este valabil și pentru un spațiu metric (T, d) oarecare. De aceea ne vom plasa în acest caz general.

Să presupunem că orice mulțime deschisă a spațiului (T, d) este măsurabilă (μ^*) și să considerăm două mulțimi E_1, E_2 spuse la condiția

$$d(E_1, E_2) > 0.$$

Putem construi o mulțime deschisă $G \supseteq E_1$, *disjunctă* de E_2. De exemplu, G poate fi bula generalizată, cu centrul pe E_1 și cu raza

$$r = \frac{1}{2} d(E_1, E_2).$$

Mulțimea G este, prin ipoteză, măsurabilă (μ^*). Deci pentru orice $H \in \mathcal{H}$ avem

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap G) + \mu^*(H \cap \complement G).$$

Dacă înlocuim pe H prin $E_1 \cup E_2$ obținem

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2).$$

Cu alte cuvinte:

Dacă orice mulțime deschisă a spațiului (T, d) este măsurabilă (μ^*), atunci μ^* este aditivă pentru orice pereche de mulțimi la distanță strict pozitivă una de alta.

8.3.2. Proprietatea de mai sus a fost luată de Carathéodory drept o nouă axiomă pe care trebuie să o verifice o măsură exterioară pe $\mathcal{H}$. Această axiomă se numește astăzi *axioma lui Carathéodory.*

Orice măsură exterioară $\mu^* : \mathcal{H} \to \overline{\mathbf{R}}_+$ care verifică axioma lui Carathéodory se numește o măsură exterioară a lui Carathéodory.

Importanța deosebită a măsurii exterioare Carathéodory stă în faptul că proprietatea din **8.3.1.** poate fi inversată:

Teorema lui Carathéodory: *Oricare ar fi măsura exterioară a lui Carathéodory, familia $\mathfrak{A}$ a mulțimilor măsurabile (μ^*) conține totdeauna familia mulțimilor boreliene ale spațiului (T, d).*

Pentru demonstrarea acestei teoreme vom stabili în prealabil două leme:

Lema 1. Fie G o mulțime deschisă. Dacă $A \subseteq G$ și

$$A_n = \left\{ t : t \in A_0, \quad d(t, \complement G) \geqq \frac{1}{n} \right\},$$

atunci $\lim_{n \to \infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A_0)$.

Lema presupune că şirul $\{\mu^*(A_n)\}$ are o limită. Acest lucru este însă evident, deoarece şirul considerat este crescător, întrucît şirul $\{A_n\}_{n\in N}$ este vizibil ascendent. Cum $A_n \subseteq A_0$ oricare ar fi n, deducem $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(A_n) \leqq \mu^*(A_0)$.

Pe de altă parte, din $A_n \subseteq A_0$ deducem $\bigcup\limits_{n\in N} A_n \subseteq A_0$. Fie, acum, $t \in A_0$ şi $d(t, \complement G) = k$. Evident $k \neq 0$, deoarece $\complement G$ este o mulţime închisă şi $t \notin \complement G$. Pentru $n > \frac{1}{n}$, vom avea $t \in A_n$, de unde $A_0 \subseteq \bigcup\limits_{n\in N} A_n$.

Deci, în definitiv,

$$\bigcup_{n\in N} A_n = A_0.$$

Să punem

$$D_n = A_{n+1} - A_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Putem scrie

$$A_0 = A_{2n} \cup \bigcup_{p=2n}^{\infty} D_p = A_{2n} \cup \bigcup_{p=n}^{\infty} D_{2p} \cup \bigcup_{p=n}^{\infty} D_{2p+1},$$

de unde

$$\mu^*(A_0) \leqq \mu^*(A_{2n}) + \sum_{p=n}^{\infty} \mu^*(D_{2p}) + \sum_{p=n}^{\infty} \mu^*(D_{2p+1}).$$

Vom avea de examinat două ipoteze:

1) Ambele serii $\sum \mu^*(D_{2p})$, $\sum \mu^*(D_{2p+1})$ sînt convergente. Atunci relaţia precedentă ne dă, pentru $n \to \infty$,

$$\mu^*(A_0) \leqq \lim\ \mu^*(A_{2n}),$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A_0).$$

2) Una din seriile precedente este divergentă.

Fie, pentru a face o alegere, $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \mu^*(D_{2p}) = +\infty$.

Fie $t \in D_{2p} \subseteq A_{2p+1}$ şi $z \in \complement G$.

Prin definiţia lui A_{2p+1} vom avea

$$d(t, z) \geqq \frac{1}{2p+1}.$$

Fie acum $y \in D_{2p+2} \subseteq A_{2p+3}$. Vom avea

$$\frac{1}{2p+2} > d(y, z) \geqq \frac{1}{2p+3},$$

de unde

$$d(t, y) \geqq d(t, z) - d(y, z) \geqq \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2}.$$

Aşadar,

$$d(D_{2p}, D_{2p+2}) > 0, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Cum $A_{2n} \supseteq \bigcup_{p=1}^{n-1} D_{2p}$, deducem, în baza axiomei lui Carathéodory,

$$\mu(^*A_{2n}) \geqq \mu^*\left(\bigcup_{p=1}^{n-1} D_{2p}\right) = \sum_{p=1}^{n-1} \mu^*(D_{2p}),$$

de unde

$$\lim \mu^*(A_n) = \lim \mu^*(A_{2n}) = \infty,$$

deci $\mu^*(A_0) = +\infty$ şi relaţia cerută este verificată şi în acest caz.

Lema 2. *Orice mulţime închisă F este măsurabilă* (μ^*).

Va fi suficient să arătăm că pentru orice $H \in \mathcal{H}$

$$\mu^*(H) \geqq \mu^*(H \cap F) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}F).$$

Să punem $G = \mathbf{C}F$ şi $A_0 = H \cap \mathbf{C}F \subseteq G$. Lema 1 este aplicabilă: există un şir ascendent $\{A_n\}_{n \in N}$ de mulţimi incluse în A_0, astfel încît

$$d(A_n, F) \geqq \frac{1}{n} \text{ şi } \lim \mu^*(A_n) = \mu^*(H \cap \mathbf{C}F).$$

Din incluziunea evidentă

$$(H \cap F) \cup A_n \subseteq H,$$

deducem

$$\mu^*(H \cap F) + \mu^*(A_n) \leqq \mu^*(A),$$

de unde, pentru $n \to \infty$,

$$\mu^*(H \cap F) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}F) \leqq \mu^*(H).$$

Teorema lui Carathéodory rezultă acum imediat. Fie $\mathfrak{F}_0$ familia mulţimilor închise. Se ştie că familia $\mathcal{G}$ a mulţimilor boreliene este clanul borelian generat de $\mathfrak{F}_0$. Cum $\mathcal{A}$ este un clan borelian care conţine familia $\mathfrak{F}_0$, rezultă că $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{G}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. MĂSURA LUI LEBESGUE

8.4.1. Să considerăm cazul particular în care (T, d) este un spațiu euclidian cu q dimensiuni ($q \geqq 1$).

În acest paragraf vom studia măsura *exterioară a lui Lebesgue* definită în **8.1.2.**

Prin definiție, orice mulțime măsurabilă în raport cu măsura exterioară a lui Lebesgue este o mulțime măsurabilă Lebesgue.

Teoremă: *Măsura exterioară a lui Lebesgue este o măsură exterioară a lui Carathéodory.*

În adevăr, fie E_1, E_2 două mulțimi la distanță k strict pozitivă una de alta și $\mathcal{I}$ o familie numerabilă de intervale care acoperă mulțimea $E_1 \cup E_2$. Printr-o partiție eventuală a intervalelor putem considera că diametrul acestor intervale este $< k$.

Dacă A este reuniunea intervalelor din I, putem scrie

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

unde $A_1 \supseteq E_1$, $A_2 \supseteq E_2$, $A_3 \cap E_1 = A_3 \cap E_2 = \emptyset$.

Evident

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) \leqq \mu(A),$$

de unde

$$\mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) \leqq \mu^*(E_1 \cup E_2).$$

Cum inegalitatea opusă este evidentă, teorema este demonstrată.

Consecință: *Orice mulțime boreliană este măsurabilă Lebesgue.*

8.4.2. Teorema I. *Pentru orice mulțime $E \subseteq \mathbf{R}^q$ există o mulțime A de tip G_δ astfel încît*

$$A \supseteq E \text{ și } \mu(A) = \mu^*(E).$$

În adevăr, potrivit definiției funcției μ^*, există o reuniune numerabilă de intervale $I_n = \bigcup_{k \in N} I_n^k \supseteq E$, astfel încît

$$\mu^*(E) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_n^k) < \mu^*(E) + \frac{1}{n} \leqq \mu(I_n) + \frac{1}{n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să punem $A = \bigcap_{n \in N} I_n$. A este o mulţime de tip G_δ şi avem $E \subseteq A$, de unde $\mu^*(E) \leqq \mu(A)$. Pe de altă parte, din $A \subseteq I_n$ deducem

$$\mu(A) \leqq \mu(I_n) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\,(I_n^k) < \mu^*\,(E) + \frac{1}{n},$$

de unde $\mu(A) \leqq \mu^*(E)$ şi teorema este demonstrată.

Observaţie importantă. Să presupunem mulţimea E măsurabilă Lebesgue. Din demonstraţia precedentă rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime deschisă $G \supseteq E$, astfel încît

$$\mu(E) \leqq \mu(G) < \mu(E) + \varepsilon,$$

de unde

$$\mu(G - E) < \varepsilon.$$

O măsură μ cu proprietatea următoare: Pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime deschisă $G \supseteq E$ astfel încît $\mu(G-E) < \varepsilon$, se numeşte o măsură *regulată*.

Regularitatea unei măsuri se caracterizează şi prin proprietatea

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) : G \supseteq E,\ G \in \mathcal{G}_0\}.$$

Din cele de mai sus se vede că măsura lui Lebesgue este o măsură regulată.

Se poate arăta că dacă E este măsurabilă Lebesgue, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime închisă $F \subseteq E$, astfel încît $\mu(E - F) < \varepsilon$.

Demonstraţia acestei proprietăţi rezultă din precedenta, prin trecerea la mulţimile complementare.

Cititorul va putea singur să împlinească detaliile.

Teorema II. *Orice mulţime măsurabilă Lebesgue diferă de o mulţime boreliană printr-o mulţime de măsură nulă.*

Fie $E \in \mathcal{A}$. Vom arăta că există o mulţime $B \subseteq E$, de tip F_σ, astfel încît $\mu(E - B) = 0$. În adevăr, să punem $\complement E = E'$.

În baza teoremei I există o mulţime $A' \supseteq E'$, de tip G_δ, astfel încît $\mu(A' - E') = 0$.

Dar din egalitatea $A' - E' = E - \complement A'$ deducem, punînd $\complement A' = B$, $\mu(E-B) = 0$, iar B este de tip F_σ. Teorema rezultă imediat. Să punem $E - B = V$. Deducem $E = B \cup V$, cu $\mu(V) = 0$.

Exerciţii: 1° O mulţime $E \subseteq \mathbf{R}^q$ este măsurabilă Lebesgue dacă şi numai dacă

$$\inf\{\mu^*(G - E) : G \in \mathcal{G}_0,\quad G \supseteq E\} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

R: Dacă E este măsurabilă, avem pentru $H \in \mathcal{H}$,

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap \mathbf{C}E).$$

Înlocuind pe H prin mulțimea A din teorema I, obținem

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap \mathbf{C}E).$$

Dar $\mu(A) = \mu(E)$. Din $E \subseteq A$ deducem $\mu(A \cap E) = \mu(E) = \mu(A)$, deci $\mu(A-E) = 0$ etc. Reciproc, dacă relația din enunț este verificată, există o mulțime deschisă $G_n \supseteq E$ astfel încît $\mu^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$. Din identitatea

$$\bigcap_{n \in N} G_n - E = \bigcap_{n \in N} (G_n - E)$$

deducem, punînd $A = \bigcap_{n \in N} G_n$,

$$0 \leqq \mu^*(A - E) \leqq \mu^*(G_n - E) < \frac{1}{n},$$

deci $\mu^*(A-E) = 0$ și $A-E = V$ este măsurabilă Lebesgue etc.

2° Fie $E \subseteq \mathbf{R}^q$ o mulțime măsurabilă Lebesgue. După N. Luzin, o funcție $x: E \to \overline{\mathbf{R}}$ posedă proprietatea (C) dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există o mulțime închisă $F_\varepsilon \subseteq E$, astfel încît

1° x este continuă pe F_ε; 2° $\mu(E-F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Să se arate că mulțimea funcțiilor cu proprietatea (C) formează un spațiu vectorial (real).

3° Să se arate că orice funcție etajată pe $\mathcal{A}$ posedă proprietatea (C)

R: Fie $g = \sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{E_i}$, $\bigcup E_i = E$.

Pentru orice i există o mulțime închisă $F_i \subseteq E_i$, astfel încît $\mu(E_i - F_i) < \frac{\varepsilon}{p+1}$. Mulțimea $\bigcup_{i \leqq p} F_i = F_\varepsilon$ este închisă și avem $\mu(\mathbf{C}F_\varepsilon) < \varepsilon$. Cum mulțimile F_i sînt disjuncte, deci separate, rezultă că g este continuă pe F_ε.

4° O funcție $x: E \to \overline{\mathbf{R}}$, unde E este măsurabilă Lebesgue, este măsurabilă dacă și numai dacă această funcție posedă proprietatea (C). (Teorema lui N. Luzin).

R: Să presupunem $\mu(E) < \infty$. Dacă x este măsurabilă, există un șir $\{x_n\}$ de funcții etajate care tinde către x.

Fiecare x_n posedă proprietatea (C) (ex. precedent). Deci există o mulțime închisă F_n pe care x_n este închisă și $\mu(E - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Pe de

altă parte, în baza teoremei lui Egorov există o mulțime măsurabilă $E_0 \subseteq E$ pe care $\{x_n\}$ converge *uniform* și $\mu(E - E_0) < \frac{\varepsilon}{4}$. Putem construi o mulțime închisă $F_0 \subseteq E_0$, astfel încît $\mu(E_0 - F_0) < \frac{\varepsilon}{4}$, de unde $\mu(E - F_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Să punem $F = \bigcap_{n \in N} F_n$.

Mulțimea $F \subseteq F_0$ este închisă. Șirul $\{x_n\}$ converge uniform pe F. Din $F \subseteq F_n$, $n = 1, 2, \ldots$ rezultă că funcțiile x_n sînt continue pe F, deci x este continuă pe F. În sfîrșit, $\mu(E - F) < \varepsilon$.

Dacă $\mu(E) = +\infty$, putem scrie $E = \bigcup_{n \in N} E_n$, cu $\mu(E_n) < \infty$. Se va aplica rezultatul obținut pentru fiecare E_n.

Reciproc: Dacă x posedă proprietatea C, atunci există o mulțime închisă F_n pe care x este continuă și $\mu(E - F_n) < \frac{1}{n}$. Vom pune $H = \bigcup_{n \in N} F_n$. H este măsurabilă și x este continuă pe H, deci măsurabilă (mulțimea $\{t : x(t) > a\}$ este deschisă, deci măsurabilă Lebesgue). Să punem $A = E - H$. Avem

$$A = E - \bigcup_{n \in N} F_n = \bigcap_{n \in N} (E - F_n),$$

de unde $\mu(A) < \frac{1}{n}$, deci $\mu(A) = 0$. Funcția x este continuă a.p.(μ) pe E, deci măsurabilă (a se vedea teorema I din §-ul următor).

§ 5. INTEGRALA LUI LEBESGUE. LEGĂTURA CU INTEGRALA LUI RIEMANN

8.5.1. Potrivit teoremei generale din **8.2.1.**, măsura exterioară μ^* a lui Lebesgue, definită pentru un spațiu euclidian $\mathbf{R}^q$, determină în acest spațiu un clan $\mathcal{A}$ astfel încît restricția lui μ^* la $\mathcal{A}$ este o măsură pe $\mathcal{A}$. Întreaga teorie a integralei, dezvoltate în capitolul VII, se aplică acestei măsuri, fără nici o excepție.

Integrala unei funcții x, măsurabilă ($\mathcal{A}$) în raport cu această măsură μ, se numește integrala lui Lebesgue a lui x.

Istoricește, integrala lui Lebesgue constituie primul progres în teoria integralei, după integrala lui Riemann.

Este natural să ne punem problema dacă integrala lui Lebesgue constituie o extensiune efectivă a integralei lui Riemann. Răspunsul este afirmativ, după cum vom vedea din analiza ce vom face mai jos.

Scanned with OKEN Scanner

8.5.2. Fie D un domeniu *mărginit* al spațiului $\mathbf{R}^q$. Știm că D este măsurabil Lebesgue. Fie $\mu(D)$ măsura sa, în sensul lui Lebesgue. Fie, de asemenea, $\tau'(D)$ și $\tau''(D)$ aria exterioară și aria interioară a lui D, în sensul lui Jordan.

Evident

$$\tau''(D) \leqq \mu(D) \leqq \tau'(D).$$

Dacă deci D are o arie $\tau(D)$, atunci $\tau(D) = \mu(D)$. Altfel spus: Dacă D este măsurabilă Jordan, aria sa coincide cu măsura în sensul lui Lebesgue a lui D.

Teorema I. *Dacă funcția* $x : D \to \mathbf{R}$ *este a.p.*(μ) *continuă, atunci* x *este măsurabilă Lebesgue.*

Fie, în adevăr, A mulțimea punctelor din D în care x este continuă și $B = D - A$.

Prin ipoteză, $\mu(B) = 0$, deci pentru orice mulțime $F \subseteq B$ avem $\mu(F) = 0$.

Cu această observație, pentru orice interval deschis $I \subseteq R$ avem

$$x^{-1}(I) = E \cup F,$$

unde $E \subseteq A$, $F \subseteq B$, deci $\mu(F) = 0$.

Să notăm cu y restricția lui x la mulțimea A. Vom avea

$$y^{-1}(I) = E,$$

prin urmare mulțimea E este deschisă în raport cu A; adică $E = G \cap A$, unde G este o mulțime deschisă. Cum $A = D - B$, A este măsurabilă, deci E este o mulțime măsurabilă.

În definitiv, mulțimea $x^{-1}(I)$ este măsurabilă, deci x este o funcție măsurabilă.

Teorema II. *Dacă* $x : D \to \mathbf{R}$ *este integrabilă Riemann, această funcție este integrabilă Lebesgue și cele două integrale coincid.*

În adevăr, prin ipoteză x este mărginită. Înlocuind eventual pe x prin $x + k$, unde k este o constantă convenabilă, putem presupune $x \geqq 0$.

Cum x este integrabilă Riemann, ea este a.p. (μ) continuă, deci măsurabilă. Fiind pozitivă, integrala sa în sensul lui Lebesgue are un sens.

Fie deci

$$0 \leqq x \leqq M.$$

Fie

$$(d) \qquad D = \bigcup_{k \leqq n} E_k$$

o partiție a lui D în domenii parțiale, deci **mulțimi** măsurabile, care să fie în același timp măsurabile Jordan. Se știe că **integrala** riemanniană a lui x este definită prin egalitatea

$$\int_D x \, d\nu = \sup_{d \in \mathfrak{D}} \sum_{i=1}^{n} w_k \nu(E_k),$$

unde $w_k = \inf \{x(t) : t \in E_k\}$, iar $\nu(E_k)$ este măsura **jordaniană** a lui E_k.

În aceeași relație, $\mathfrak{D}$ este familia tuturor **partițiilor** finite ale lui D în domenii măsurabile Jordan. Să notăm cu $\mathfrak{D}'$ **familia** tuturor partițiilor finite ale lui D în mulțimi măsurabile Lebesgue. Evident, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'$, de unde

$$\int_D x d\nu \leqq \int_D x d\mu. \tag{1}$$

Să considerăm acum funcția $y = M - x$.

Avem

$$0 \leqq y \leqq M.$$

Aplicînd inegalitatea (1) funcției M, obținem

$$\int_D x d\nu \geqq \int_D x d\mu,$$

de unde

$$\int_D x d\nu = \int_D x d\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX

INTEGRALA PE UN SPAȚIU-PRODUS

§ 1. FAMILII MONOTONE DE MULȚIMI

9.1.1. Dacă T este un spațiu (nu neapărat topologizat), vom spune că familia $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{P}(T)$ constituie un *clan* dacă:

1° $E \in \mathfrak{K}$ și $F \in \mathfrak{K}$ implică $E \cup F \in \mathfrak{K}$;

2° $E \in \mathfrak{K}$ și $F \in \mathfrak{K}$ implică $E - F \in \mathfrak{K}$.

Orice clan conține mulțimea vidă.

9.1.2. O familie $\mathfrak{M}$ de mulțimi din T este, prin definiție, o *familie monotonă* dacă pentru orice șir $\{E_n\}_{n \in N}$ monoton (adică: ascendent sau descendent) de mulțimi aparținînd acestei familii, avem

$$\lim_{n \to \infty} E_n \in \mathfrak{M}.$$

Familia $\mathfrak{P}(T)$ constituie un exemplu de familie monotonă.

Este vizibil că dacă $\{\mathfrak{M}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este un sistem de familii monotone, atunci

$$\mathfrak{M} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{M}_\alpha$$

este o familie monotonă.

Fie $\mathfrak{S}$ o familie oarecare de mulțimi din T. Vom nota cu $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ intersecția tuturor familiilor monotone care conțin pe $\mathfrak{S}$. Este evident că $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ este o familie monotonă; o vom numi familia monotonă *generată* de $\mathfrak{S}$.

Un clan borelian constituie o familie monotonă (exercițiu!). Este adevărată reciproca acestei propoziții? Răspunsul este dat de

Teorema I. *Dacă o familie monotonă $\mathfrak{M}$ este un clan, ea este un clan borelian.*

Fie $E_n \in \mathfrak{M}$, $n = 1, 2, \ldots$ Avem, oricare ar fi p,

$$\bigcup_{n \leqq P} E_n \in \mathfrak{M}.$$

Dar șirul $\left\{\bigcup_{n \leqq p} E_n\right\}$ este monoton ascendent și limita sa $\bigcup_{n \in N} E_n \in \mathfrak{M}$. Un rezultat mai precis este conținut în

Teorema II. *Dacă $\mathfrak{B}$ este un clan, atunci $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ coincide cu clanul borelian $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ generat de $\mathfrak{B}$.*

În adevăr, $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ deoarece $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ este o familie monotonă. Dacă deci arătăm că $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ este un clan borelian, atunci $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$.

Vom face să corespundă fiecărei mulțimi $F \subseteq T$ familia $\mathfrak{K}(F)$ a mulțimilor E pentru care

$$E - F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}),\ F - E \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}),\ E \cup F \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}).$$

Evident, din cauza simetriei condițiilor impuse, $E \in \mathfrak{K}(F)$ implică $F \in \mathfrak{K}(E)$ și reciproc.

Fie $\{E_n\}_{n \in N}$ un șir monoton de mulțimi din $\mathfrak{K}(F)$.

Vom avea

$$\lim E_n - F = \lim (E_n - F) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}),$$

$$F - \lim E_n = \lim (F - E_n) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}),$$

$$F \cup \lim E_n = \lim (F \cup E_n) \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}),$$

deci $\mathfrak{K}(F)$ este o familie monotonă.

Fie acum, $E_1 \in \mathfrak{B}$, $F_1 \in \mathfrak{B}$. Evident, $E_1 \in \mathfrak{K}(F_1)$, de unde $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}(F_1)$. Deci $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{K}(F_1)$, deoarece $\mathfrak{K}(F_1)$ este o familie monotonă. Prin urmare, $E_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ implică $E_1 \in \mathfrak{K}(F_1)$, de unde, în baza observației de mai sus,

$$F_1 \in \mathfrak{K}(E_1).$$

Cum F_1 este arbitrară în $\mathfrak{B}$, deducem $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}(E_1)$, de unde — iarăși —

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{K}(E_1).$$

Așadar, pentru orice $E_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ avem incluziunea precedentă. Din definiția lui $\mathfrak{K}$ rezultă că $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ este un clan, deci (teorema I) un clan borelian.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. MĂSURA PE UN SPAŢIU-PRODUS

9.2.1. Fie T, T' două spaţii. Dacă $A \subseteq T$, $B \subseteq T'$, vom numi pentru uşurinţă mulţimea $E = A \times B$ un dreptunghi.

Pentru acelaşi motiv, mulţimile A, B vor fi numite *laturile* dreptunghiului E.

Exerciţii: 1° Un dreptunghi este vid dacă şi numai dacă una din laturile sale este vidă.

2° Fie $E_1 = A_1 \times B_1$, $E_2 = A_2 \times B_2$. Avem $E_1 \subseteq E_2$ dacă şi numai dacă simultan $A_1 \subseteq A_2$, $B_1 \subseteq B_2$.

3° Dacă $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2 \neq \emptyset$, atunci $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$.

4° Fie $E = A \times B$, $E_1 = A_1 \times B_1$, $E_2 = A_2 \times B_2$.

E_1 şi E_2 constituie o partiţie a lui E dacă şi numai dacă una din următoarele condiţii este îndeplinită:

1) $A = A_1 \cup A_2$, cu $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ şi $B = B_1 = B_2$;

2) $B = B_1 \cup B_2$, cu $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ şi $A = A_1 = A_2$.

9.2.2. Fie $\mathcal{A}$ un clan borelian de părţi ale lui T şi $\mathcal{A}'$ un clan borelian de părţi ale lui T'.

Clanul borelian general în $T \times T'$ de familia

$$\{A \times A'\}_{A \in \mathcal{A},\, A' \in \mathcal{A}'},$$

va fi numit *clanul borelian produs* al celor două clanuri boreliene $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ şi va fi notat $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$.

Pentru simplificarea notaţiilor vom pune

$$U = T \times T', \quad \mathfrak{B} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}'.$$

Un dreptunghi $A \times A'$ este, prin definiţie, *măsurabil*, dacă $A \in \mathcal{A}$ $A' \in \mathcal{A}'$.

Cu această convenţie de limbaj, definiţia lui $\mathfrak{B}$ devine: Clanul borelian $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ este clanul borelian generat de familia dreptunghiurilor măsurabile ale spaţiului $T \times T'$.

Scanned with OKEN Scanner

9.2.3. Fie $E \subseteq T \times T'$ și $t \in T$. Mulțimea

$$E_t = \{t' : (t, t') \in E\}$$

se numește *secțiunea prin t a mulțimii E*. Evident, $E_t \in T'$.

În același mod se definește secțiunea $E_{t'}$ a mulțimii E prin t'. Vom avea $E_{t'} \in T$.

Dacă $x : E \to \overline{\mathbf{R}}$, funcția x_t definită de egalitatea

$$x_t(t') = x(t, t'),$$

oricare ar fi $t' \in T'$, se numește *secțiunea prin t a funcției x*. În mod analog se definește funcția $x_{t'}$.

Teorema I. *Dacă $E \in \mathfrak{B}$, atunci $E_t \in \mathcal{A}'$, $E_{t'} \in \mathcal{A}$.*

Fie, în adevăr, $\mathfrak{S}$ familia părților spațiului $T \times T'$, pentru care $E_t \in \mathcal{A}'$, $E_{t'} \in \mathcal{A}$.

Dacă $F = A \times A'$ este un dreptunghi măsurabil, adică dacă $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}'$, atunci

$$F_t = \begin{cases} A' \\ \emptyset \end{cases}, \quad F_{t'} = \begin{cases} A \\ \emptyset \end{cases},$$

deci $\mathfrak{S}$ conține familia dreptunghiurilor măsurabile. Dar $\mathfrak{S}$ este un clan borelian (exercițiu !), deci $\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{B}$.

Teorema II. *Dacă aplicația $x : T \times T' \to \overline{R}$ este măsurabilă $(\mathfrak{B})$, atunci x_t, este măsurabilă $(\mathcal{A})$ și $x_{t'}$ este măsurabilă $(\mathcal{A}')$.*

Prin ipoteză

$$E = \{(t, t') : x(t, t') > a\} \in \mathfrak{B}.$$

Evident

$$E_t = \{t' : x_t(t') > a\}.$$

Cum $E_t \in \mathcal{A}'$ (teorema I), rezultă că x_t este măsurabilă $(\mathcal{A}')$. La fel se arată că $x_{t'}$ este măsurabilă $(\mathcal{A})$.

9.2.4. Fie $(T, \mathcal{A}, \mu)$, $(T', \mathcal{A}', \nu)$ două spații de măsuri. Cu ajutorul măsurilor μ, ν putem construi o măsură λ pe $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' = \mathfrak{B}$, grație importantei propoziții ce urmează :

Teoremă: *Dacă T este de măsură μ σ-finită și T' de măsură ν σ-finită, atunci funcțiile*

$$x : t \to \nu(E_t), \quad y : t' \to \mu(E'_t),$$

unde $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$, *sînt măsurabile în raport cu clanurile boreliene respective* $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ *și avem*

$$\int x \mathrm{d}\mu = \int y \mathrm{d}\nu.$$

Prin ipoteză, orice mulțime din $\mathfrak{B}$ poate fi acoperită de o reuniune — pe care o putem presupune disjunctă (exercițiu !) — de dreptunghiuri cu laturile de măsură finită.

Este deci suficient să stabilim egalitatea de mai sus pentru părțile măsurabile E ale unui dreptunghi cu laturile de măsură finită. Aceasta revine la a presupune de la început $\mu(T) < \infty$, $\nu(T) < \infty$.

Dacă $E = A \times A'$, cu $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}'$, atunci

$$x = \nu(A') \cdot \chi_A, \quad y = \mu(A) \cdot \chi_{A'},$$

deci x și y sînt măsurabile și avem

$$\int x \mathrm{d}\mu = \int y \mathrm{d}\mu = \mu(A) \cdot \nu(A').$$

Să notăm cu $\mathfrak{M}$ familia mulțimilor din $\mathfrak{B}$ pentru care teorema enunțată este adevărată. După cum am văzut mai sus, $\mathfrak{M}$ nu este vidă. Vom arăta că $\mathfrak{M}$ este o familie monotonă.

Fie, în adevăr $\{E^n\}_{n \in N}$ un șir monoton de mulțimi din $\mathfrak{M}$. Dacă

$$x^n(t) = \nu(E^n_t), \qquad y^n(t') = \mu(E^n_{t'}).$$

Șirurile de funcții $\{x^n\}$, $\{y^n\}$ sînt monotone, deci convergente. Dacă $E = \lim E^n$, atunci $E_t = \lim E^n_t$, $E_{t'} = \lim E^n_{t'}$, deci

$$\lim x^n(t) = \nu(E_t) = x(t),$$

$$\lim y^n(t) = \mu(E_{t'}) = y(t'),$$

deoarece $x^n(t) < \nu(T') < \infty$, $y^n(t) < \mu(T) < \infty$.

Rezultă de aici că

$$\lim \int x^n \mathrm{d}\mu = \int x \mathrm{d}\mu, \quad \lim \int y^n \mathrm{d}\nu = \int y \mathrm{d}\nu.$$

Cum

$$\int x^n \mathrm{d}\mu = \int y^n \mathrm{d}\nu,$$

Scanned with OKEN Scanner

oricare ar fi n, rezultă

$$\int x\mathrm{d}\mu = \int y\mathrm{d}\nu,$$

deci $E \in \mathfrak{M}$.

Familia monotonă $\mathfrak{M}$ conține, cum am văzut la început, dreptunghiurile măsurabile, deci și reuniunile finite și disjuncte de astfel de dreptunghiuri.

Familia acestora formează un clan $\mathfrak{R}$. Din $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{R}$ deducem $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{B}$ și teorema este demonstrată.

9.2.5. Teorema precedentă ne permite să definim o măsură $\lambda: A \times A' \to \mathbf{R}_+$ în felul următor: Pentru orice mulțime $E \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ vom pune

$$\lambda(E) = \int \nu(E_t)\mathrm{d}\mu = \int \mu(E_{t'})\mathrm{d}\nu.$$

Vom arăta că funcția astfel definită este o măsură pe $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$. Fie, în adevăr, $E = \bigcup_{n\in N} E^n$ o partiție a mulțimii E în mulțimi din $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$. Să punem $F^p = \bigcup_{n\leqq p} E^n$. Șirul $\{F^p\}$ este ascendent și tinde către E. Deoarece

$$F_t^p = \bigcup_{n\leqq p} E_t^n \qquad F_{t'}^p = \bigcup_{n\leqq p} E_{t'}^n,$$

rezultă că șirurile $\{F_t^p\}$, $\{F_{t'}^p\}$ sînt ascendente, tinzînd respectiv către E_t, E_t'.

Din egalitățile de mai sus deducem

$$\lambda\left(\bigcup_{n\leqq p} E_n\right) = \int \nu\left(\bigcup_{n\leqq p} E_t^n\right)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{p} \nu(E_t^n)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{p} \lambda(E^n),$$

deci λ este finit aditivă.

Să punem, pentru un număr p natural și $t \in T$,

$$x^p(t) = \nu\left(\bigcup_{n\leqq p} E_t^n.\right)$$

Șirul $\{x^p\}$ este crescător. Deci

$$\lim_{p\to\infty} \int \nu\left(\bigcup_{n\leqq p} E_t^n\right)\mathrm{d}\mu = \int \nu(E_t)\mathrm{d}\mu,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, prin confruntare cu relaţia precedentă,

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}\lambda(E^n)=\int\nu(E_t)\mathrm{d}\mu=\lambda(E)$$

sau

$$\lambda(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E^n).$$

Deci λ este o măsură pe $\mathcal{A}\times\mathcal{A}'$.

Dacă $E=A\times B$, cu $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{A}'$, atunci $\lambda(E)=\mu(A)\cdot\mu(B)$.

Măsura astfel introdusă se numeşte *produsul* măsurilor μ, ν. Se scrie frecvent $\lambda=\mu\times\nu$.

§ 3. TEOREMA LUI FUBINI

9.3.1. Fie $(T,\mathcal{A},\mu)$, $(T',\mathcal{A}',\nu)$ două spaţii de măsuri, precum şi spaţiul produs $(T\times T',\mathcal{A}\times\mathcal{A}',\mu\times\nu)$.

Fie $z:T\times T'\to\overline{\mathbf{R}}$, integrabilă (λ). Dacă

$$\int z(t,t')\mathrm{d}\nu=u(t)$$

există şi dacă

$$\int u(t)\mathrm{d}\mu$$

este definită, vom scrie simbolic

$$\int u(t)\mathrm{d}\mu=\int\mathrm{d}\mu\int z(t,t')\mathrm{d}\nu.$$

În mod analog se defineşte simbolul

$$\int\mathrm{d}\nu\int z(t,t')\mathrm{d}\mu$$

atunci cînd operaţiile indicate au sens.

Scanned with OKEN Scanner

9.3.2. Din dubla egalitate

$$\lambda(E) = \int \nu(E_t)\mathrm{d}\mu = \int \mu(E_{t'})\mathrm{d}\nu$$

deducem imediat că $\lambda(E) = 0$ dacă și numai dacă $\nu(E_t) = 0$, a.p. (μ) și $\mu(E_{t'}) = 0$, a.p. (ν).

Cu această observație putem enunța următoarea

Lemă: *Dacă z este măsurabilă (λ), pozitivă în $T \times T'$, atunci*[1]

$$\iint z\mathrm{d}\lambda = \int \mathrm{d}\mu \int z\mathrm{d}\nu = \int \mathrm{d}\nu \int z\mathrm{d}\mu.$$

Știm că z este limita unui șir crescător $\{z_n\}$ de funcții etajate pozitive. Va fi deci suficient să stabilim egalitățile de mai sus pentru o funcție etajată pozitivă, deci în definitiv pentru funcția caracteristică χ_E a unei mulțimi E, măsurabile (λ). Dacă $z = \chi_E$, avem

$$\int z\mathrm{d}\nu = \nu(E_t), \qquad \int z\mathrm{d}\mu = \mu(E_{t'}),$$

$$\iint z\mathrm{d}\lambda = \lambda(E),$$

deci egalitatea din enunț este verificată.

Teorema lui Fubini. *Dacă aplicația $z : T \times T' \to \overline{R}$ este integrabilă (λ), atunci*

1) *funcția $z_{t'}(t) : T \to \overline{\mathbf{R}}$ este integrabilă (μ), a.p. (ν);*

2) *funcția $z_t(t') : T' \to \overline{\mathbf{R}}$ este integrabilă (ν) a.p. (μ);*

3) *funcțiile*

$$t \to f(t) = \int z(t, t')\mathrm{d}\nu, \quad t' \to g(t') = \int z(t, t')\mathrm{d}\mu$$

sînt integrabile, respectiv, în raport cu măsurile (μ), (ν) și avem

$$\iint z(t, t')\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int f(t)\mathrm{d}\mu = \int g(t')\mathrm{d}\nu.$$

[1] Vom nota convențional cu simbolul $\iint$ integrala în raport cu măsura produs λ.

Fie $z = z^+ - z^-$. Funcțiile pozitive z^+, z^- sînt integrabile (λ). Lema precedentă este deci aplicabilă fiecăreia din ele. Fie

$$f_1(t) = \int z^+(t, t')\,d\nu, \qquad g_1(t') = \int z^+(t, t')\,d\mu,$$

$$f_2(t) = \int z^-(t, t')\,d\nu, \qquad g_2(t') = \int z^-(t, t')\,d\mu.$$

Vom avea

$$\int\int z^+(t, t')\,d(\mu \times \nu) = \int f_1(t)\,d\mu = \int g_1(t')\,d\nu, \tag{1}$$

$$\int\int z^-(t, t')\,d(\mu \times \nu) = \int f_2(t)\,d\mu = \int g_2(t')\,d\nu. \tag{2}$$

Deoarece primii membri ai acestor egalități sînt, prin ipoteză, finiți, rezultă că f_1, f_2 sînt integrabile (μ), iar g_1, g_2 integrabile (ν). Deci $f = f_1 - f_2$ este integrabilă (μ), iar $g = g_1 - g_2$ integrabilă (ν).

Deoarece f_1 și f_2 sînt a.p. (μ) finite, rezultă că z^+ și z^- sînt a.p. (μ) integrabile, deci z_t este a.p. (μ) integrabilă (ν). La fel, $z_{t'}$, este a.p. (ν) integrabilă (μ).

În sfîrșit din (1) și (2) deducem, prin scădere, egalitatea din enunț.

Exerciții: 1° Fie $T = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ clanul borelian al mulțimilor măsurabile Lebesgue și μ măsura în sensul lui Lebesgue.

Fie, de asemenea, $T' = [0, 1]$, $\mathcal{A}'$ clanul borelian al părților lui T' și ν o măsură definită în felul următor: 1) $\nu(E) = n$ dacă E este o mulțime formată din n puncte; 2) $\nu(E) = +\infty$ dacă E este o mulțime infinită (cititorul va verifica singur că ν este o măsură!).

Fie, în sfîrșit $E \subseteq T \times T$, definită de perechea (t, t'). Să se arate că

$$\int \nu(E_t)\,d\mu = 1, \qquad \int \mu(E_{t'}) = 0.$$

De ce nu contrazice acest rezultat teorema din 9.2.4?

R: $\nu(E_t) = 1$, $\mu(E_{t'}) = 0$, oricare ar fi t, respectiv t'. Contrazicerea aparentă provine din faptul că T nu este de măsură ν σ-finită.

2° Fie $T = T' = [0, 1]$. Fie, de asemenea, $\{A_n \times A_n\}_{n \in N}$ un șir de pătrate disjuncte conținute în $T \times T'$, cu centrele pe una din diagonalele acestui pătrat. Fie, în sfîrșit, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie divergentă cu termeni pozitivi.

Scanned with OKEN Scanner

Se împarte fiecare pătrat $A_n \times A_n$ în patru pătrate egale şi se consideră funcţia $x : T \times T' \to \mathbf{R}$ definită astfel:

1) valoarea lui x pe două pătrate *opuse* din $A_n \times A_n$ este egală cu a_n, în timp ce valoarea lui x pe celelalte două pătrate opuse este egală cu $-a_n$;

2) valoarea lui x pe restul punctelor din $T \times T'$ este nulă.

Să se arate că x nu este integrabilă Lebesgue pe spaţiul produs $T \times T'$ şi totuşi avem

$$\int_{[0,1]} dt' \int_{[0,1]} x(t, t')dt = \int_{[0,1]} dt \int_{[0,1]} x(t, t')dt' = 0.$$

(S. Saks. *Theory of integral*, Warszawa, 1933).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL X

SPAȚIUL L^p

§ 1. INEGALITATEA LUI HÖLDER ȘI INEGALITATEA LUI MINKOWSKI

10.1.1. Fie $(T, \mathcal{A}, \mu)$ un spațiu de măsuri.

Dacă $p \geqq 1$, vom spune că aplicația $x : T \to \overline{\mathbf{R}}$ este de putere p integrabilă (subînțeles: în raport cu măsura μ) dacă:

1° x este măsurabilă;

2° $|x|^p$ este integrabilă.

În mulțimea $\mathcal{L}^p$ a funcțiilor de putere p integrabilă vom stabili o relație de echivalență ρ în felul următor:

$$< x, y > \in \rho \Leftrightarrow x = y, \quad \text{a.p. } (\mu).$$

Vom pune $L^p = \mathcal{L}^p/\rho$. Vom arăta mai departe că L^p poate fi organizat ca un spațiu vectorial normat. Acest lucru cere stabilirea prealabilă a unui număr de proprietăți.

Pentru mai multă comoditate în calcule vom lucra tot cu elemente din $\mathcal{L}^p$, convenind să nu distingem între două funcții egale a.p. (μ).

10.1.2. Se poate verifica ușor că L^p este un spațiu vectorial real. Într-adevăr, dacă $x \in L^p$ și $\alpha \in R$, atunci αx este măsurabilă (μ).

Pe de altă parte,

$$|\alpha x|^p = |\alpha|^p |x|^p \in L^1, \text{ deci } \alpha x \in L^p.$$

În al doilea rînd, fie $x \in L^p$, $y \in L^p$. Avem

$$|x + y|^p \leqq (|x| + |y|)^p \leqq 2^p \cdot \max \{|x|^p, |y|^p\}.$$

Dar $\max \{|x|^p, |y|^p\} \in L^1$, deci $x + y \in L^p$.

10.1.3. Fiecărui număr $p \geqq 1$ îi vom atașa un număr $q \geqq 1$ în felul următor:

$$q = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} + 1, & \text{dacă } p > 1, \\ +\infty, & \text{dacă } p = 1. \end{cases}$$

Numărul q se numește *conjugatul* lui p. Se vede ușor că p este conjugatul lui q.

Relația dintre p și q poate fi scrisă și astfel:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Cu aceste definiții putem enunța următoarea

Teoremă: *Dacă* $x \in L^p$, *atunci* $|x|^{p-1} \in L^q$.

Teorema implică $p > 1$. În această ipoteză

$$(|x|^{p-1})^q = |x|^{\frac{q}{q-1}} = |x|^p \in L^1,$$

deci $|x|^{p-1} \in L^q$.

10.1.4. Să considerăm funcția $\eta : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ definită pentru orice ξ pozitiv prin egalitatea

$$\eta(\xi) = \xi^{p-1}. \tag{1}$$

Funcția inversă $\eta^{-1} = \xi$ este definită de

$$\xi(\eta) = \eta^{\frac{1}{p-1}} = \eta^{q-1}. \tag{2}$$

Fie acum a și b două numere pozitive.

O simplă verificare pe graficul funcției (1) ne arată că

$$\int_0^a \xi^{p-1} d\xi + \int_0^b \eta^{q-1} d\eta \geqq ab,$$

de unde

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{3}$$

Cu ajutorul acestei importante inegalități, vom putea enunța următoarele teoreme:

Teorema I. *Dacă* $x \in L^p$, $y \in L^q$, *atunci* $xy \in L^1$.

În adevăr, din (3) deducem

$$|xy| = |x| \cdot |y| \leqq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \in L^1.$$

Teorema II. (Hölder). *Dacă* $x \in L^p$, $y \in L^q$, *atunci*

$$\int |xy| d\mu \leqq \left(\int |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Este suficient să punem în inegalitatea (3)

$$a = \frac{|x|}{\left(\int |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad b = \frac{|y|}{\left(\int |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Observație. Inegalitatea precedentă este cunoscută sub numele de inegalitatea lui Hölder.

Dacă $p = 2$, atunci $q = 2$. Inegalitatea obținută se numește inegalitatea lui Schwarz.

Teorema III. (Minkowski). *Dacă* $p > 1$, $x \in L^p$, $y \in L^p$, *atunci*

$$\left(\int |x + y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\int |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

În adevăr, $x + y \in L^p$. Putem scrie

$$|x + y|^p = |x + y|^{p-1}|x + y| \leqq |x + y|^{p-1}|x| + |x + y|^{p-1}|y|.$$

Cum $|x| \in L^p$, $|y| \in L^p$ și $|x + y|^{p-1} \in L^q$ (teorema I), rezultă că fiecărui produs din membrul II i se poate aplica inegalitatea lui Hölder. Obținem astfel

$$\int |x + y|^p d\mu \leqq \left(\int |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |x + y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |x + y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

de unde inegalitatea din enunț (inegalitatea lui Minkowski).

§ 2. SPAȚIUL L^p

10.2.1. Inegalitatea lui Minkowski ne sugerează să introducem în spațiul vectorial L^p o *normă* în felul următor:

$$\|x\|_p = \left(\int |x|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Atunci cînd nici o confuzie nu este posibilă, vom scrie $\|x\|$ în loc de $\|x\|_p$.

Cititorul va verifica singur, ca exercițiu, că funcția $x \to \|x\|_p$ este în adevăr o normă.

Vom arăta că, pentru $p \geqq 1$, spațiul L^p, cu norma dată de (1), este complet.

Teoremă. *Spațiul L^p, $(p \geqq 1)$, este un spațiu al lui Banach.*

Să considerăm, în primul rînd, un șir $\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente pozitive din L^p, astfel încît $\sum_1^\infty \|x_n\|_p < +\infty$; să punem $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Vom arăta că $x \in L^p$.

În adevăr, să punem $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$. În baza inegalității lui Minkowski avem $\|y_n\|_p \leqq \sum_{k=1}^n \|x_k\|_p$.

Pe de altă parte, $y \uparrow x$, de unde $y\frac{p}{n} \uparrow x^p$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \int y_n^p \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} y_n^p \mathrm{d}\mu = \int x^p \mathrm{d}\mu$$

și $x \in L^p$.

Fie acum $\{x_n\}_{n\in N}$ un șir fundamental în L^p. Trecînd eventual la un subșir, putem presupune că avem, oricare ar fi n,

$$\|x_{n+1} - x_n\|_p < \frac{1}{2^n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să punem, respectiv,

$$y_n = x_n - \sum_{k=n}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|, \quad z_n = x_n + \sum_{k=n}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|.$$

Din cazul particular studiat la început rezultă că $y_n \in L^p$, $z_n \in L^p$ oricare ar fi n.

Mai mult: șirul $\{y_n\}$ este crescător, iar șirul $\{z_n\}$ descrescător și avem

$$\|y_n - z_n\|_p \leqq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Să punem $x = \lim y_n$. Atunci $|y_n|^p$ tinde către $|x|^p$. Din $y_n \in L^p$ deducem, în asemenea condiții, $x \in L^p$.

Cum

$$\|x - x_n\|_p \leqq \|z_n - y_n\|_p \leqq \frac{1}{2^{n-2}},$$

rezultă că șirul fundamental inițial conține un subșir convergent în L^p, deci este el însuși convergent în L^p, către funcția x[1].

10.2.2. Iată o consecință importantă a teoremei precedente.

Teoremă. *Spațiul I^p al funcțiilor etajate pe $\mathcal{A}$, p-integrabile este dens în L^p.*

În adevăr, fie $x \in L^p$. Există un șir crescător $\{x_n^+\}_{n \in N}$ de funcții etajate, pozitive, care tinde către x^+. De asemenea, există un șir $\{x_n^-\}_{n \in N}$ crescător de funcții etajate pozitive, tinzînd către x^-.

Să punem $x_n = x_n^+ - x_n^-$. Șirul de funcții etajate $\{x_n\}_{n \in N}$ tinde către x și avem

$$|x_n| \leqq |x|,$$

de unde

$$|x_n|^p \leqq |x|^p, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Deci $x_n \in L^p$, $n = 1, 2, \ldots$ Șirul $\{|x - x_n|^p\}_{n \in N}$ tinde către zero, iar, pe de altă parte,

$$|x - x_n|^p < 2^p |x|^p,$$

[1] Demonstrația de față, diferită de demonstrația din prima ediție, este împrumutată din monografia *An introduction to abstract harmonic analysis*, de L. H. Loomis (New York, 1953, p. 38–39).

deci criteriul lui Lebesgue este aplicabil şi obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \int |x - x_n|^p \, d\mu = 0,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_p = 0$$

şi teorema este demonstrată.

Consecinţă importantă: Din teorema de completare a lui Hausdorff şi din teorema precedentă rezultă că *spaţiul metric L^p este completatul (unic, în afară de un homeomorfism izometric) al lui I^p.*

De aici rezultă că teoria spaţiilor L^p, şi în particular teoria integralei, s-ar fi putut face pornind de la spaţiul metric I^p şi definind elementele din L^p ca elementele spaţiului metric complet obţinut prin completarea lui I^p potrivit teoremei lui Hausdorff.

Unii autori prezintă această teorie în modul arătat aici.

Exerciţii: 1° Spaţiul L^2 poate fi organizat ca spaţiu al lui Hilbert (real) dacă pentru $x \in L^2$, $y \in L^2$ se defineşte produsul interior (x, y) astfel

$$(x, y) = \int xy \, d\mu.$$

R: Dacă $x \in L^2$, $y \in L^2$, atunci $xy \in L^1$, deci membrul II al egalităţii precedente are sens.

Norma în acest spaţiu al lui Hilbert coincide cu norma din L^2:

$$\|x\| = \left(\int |x|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2° Să se arate că, în afară de o izometrie, avem $(L^2)^* = L^2$ (spaţiul L^2 este autoconjugat).

R: În baza teoremei lui Fréchet-Riesz, fiecărei funcţionale lineare şi continue f definite pe L^2, organizat ca spaţiu al lui Hilbert, îi corespunde un element $y_f \in L^2$, astfel încît să avem

$$\|f\| = \|y_f\|_2 \quad f(x) = (x, y_f) = \int xy_f \, d\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, fiecărui element $y_f \in L^2$ îi corespunde, prin egalitatea precedentă, o funcțională liniară și continuă, cu proprietatea $\|f\| = \|y_f\|_2$.

3° Pentru o funcție $x : T \to \overline{\mathbf{R}}$, a.p. (μ) finită se definește *marginea superioară esențială* (în scris: „ess sup", sau „vrai max") prin egalitatea

$$\operatorname{ess\,sup} x(t) = \inf_{E_0 \in \mathfrak{S}_0} \sup_{t \in T - E_0} x(t),$$

unde E_0 parcurge familia $\mathfrak{S}_0$ a tuturor mulțimilor de măsură μ nulă ale spațiului T.

Să se arate că dacă $\mu(T) < \infty$ și x este p-integrabilă, atunci

$$\lim_{p \to \infty} \left(\int |x|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \operatorname{ess\,sup} |x(t)|.$$

(F. Riesz).

R: Vom putea presupune $\mu(T) = 1$. Fie

$$\operatorname{ess\,sup} |x(t)| = M, \quad I_p = \left(\int |x|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Evident, $I_p \leqq M$. Dacă $M < \infty$, vom pune

$$E_\varepsilon = \{t : |x(t)| > M - \varepsilon\}.$$

Avem

$$I_p \geqq \left(\int_{E_\varepsilon} |x|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} > (M - \varepsilon) \cdot [\mu(E_\varepsilon)]^{\frac{1}{p}},$$

de unde, pentru p suficient de mare,

$$I_p \geqq M - \varepsilon.$$

Deci, pentru p suficient de mare

$$M - \varepsilon \leqq I_p \leqq M,$$

ceea ce înseamnă că $\lim_{p \to \infty} I_p = M$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $M = +\infty$, atunci, oricare ar fi $E \in \mathcal{E}_0$, funcţia $|x|$ nu este mărginită superior pe $T - E_0$. Cu atît mai mult $|x|$ nu este mărginită superior pe T. Fie $A > 0$, altfel arbitrar, şi

$$E_A = \{t : |x(t)| > A\}.$$

Există $A_0 > 0$, astfel încît $A > A_0$ să implice $\mu(A) > 0$. În asemenea condiţii, avem

$$I_p \geqq \left(\int_E |x|^p\right)^{\frac{1}{p}} > A\,[\mu(A)]^{\frac{1}{p}},$$

de unde, pentru p suficient de mare, $I_p \geqq A$.

Cum A este arbitrar, rezultă că $\lim_{p\to\infty} I_p = +\infty = M$.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefață 3

CAP. I. Mulțimi 5

§ 1. Apartenență, incluziune, egalitate 5
§ 2. Operații cu mulțimi 7
§ 3. Relații 11
§ 4. Funcții (aplicații) 16
§ 5. Funcția caracteristică a unei mulțimi. Limitele extreme ale unei familii de mulțimi 24
§ 6. Relații de ordine 26
§ 7. Produs cartezian 29
§ 8. Ordonarea numerelor cardinale. Operații cu numerele cardinale 33

CAP. II. Elemente de topologie generală 41

§ 1. Noțiunea de spațiu topologic 41
§ 2. Bază. Spații cu bază numerabilă 49
§ 3. Relativizare. Conexiune 53
§ 4. Continuitate 59
§ 5. Funcții continue reale. Funcții continue definite pe dreapta numerică . . 61
§ 6. Compacitate 65
§ 7. Proprietăți ale funcțiilor continue, definite pe un compact 68
§ 8. Spații Hausdorff 71
§ 9. Compactificarea cu un punct a unui spațiu topologic. Teorema lui P. S. Alexandrov 74
§ 10. Spații topologice regulate. Spații normale. Teoremele lui Urison. Teorema de prelungire a lui Tietze 77

CAP. III. Spații metrice 83

§ 1. Definiții. Exemple 83
§ 2. Topologizarea unui spațiu metric 88
§ 3. Spații metrice compacte 93
§ 4. Spații metrice complete 99

CAP. IV. Spaţii vectoriale normate 111

§ 1. Definiţii. Exemple 111
§ 2. Aplicaţii lineare 113
§ 3. Teorema de prelungire a lui Hahn-Banach 119
§ 4. Inversiunea unei aplicaţii lineare şi continue. Teorema lui H. Steinhaus . . 125
§ 5. Aplicaţii închise 129
§ 6. Proiecţii 131
§ 7. Mulţimea rezolvantă a unui operator. Spectrul unui operator 135

CAP. V. Spaţii hilbertiene 140

§ 1. Definiţii. Teorema de existenţă a proiecţiilor 140
§ 2. Reprezentarea funcţionalelor lineare continue 145
§ 3. Mulţimi ortonormate 146
§ 4. Operatori adjuncţi. Operatori autoadjuncţi 154

CAP. VI. Familii de mulţimi de tip borelian. Funcţii asociate 160

§ 1. Mulţimi boreliene într-un spaţiu metric 160
§ 2. Clan borelian de mulţimi 161
§ 3. Funcţii măsurabile în raport cu un clan borelian dat 162
§ 4. Operaţii cu funcţii măsurabile 170
§ 5. Măsura 172
§ 6. Convergenţa asimptotică. Teorema lui Egorov. Convergenţa în măsură . . 175

CAP. VII. Integrala 181

§ 1. Integrarea funcţiilor etajate 181
§ 2. Funcţii integrabile 184
§ 3. Teorema lui Lebesgue-Beppo Levi 191
§ 4. Lema lui Fatou. Criteriul lui Lebesgue. Definiţia lui S. Saks 194
§ 5. Funcţii absolut continue de mulţime. Teorema lui Hahn. Teorema lui Lebesgue-Nikodym 198

CAP. VIII. Construcţia unei măsuri 211

§ 1. Măsura exterioară 211
§ 2. Mulţimi măsurabile. Măsura ca restricţie a măsurii exterioare 213
§ 3. Cazul spaţiilor metrice. Măsura lui Carathéodory 216
§ 4. Măsura lui Lebesgue 220
§ 5. Integrala lui Lebesgue. Legătura cu integrala lui Riemann 223

CAP. IX. Integrala pe un spaţiu-produs 226

§ 1. Familii monotone de mulţimi 226
§ 2. Măsura pe un spaţiu-produs 228
§ 3. Teorema lui Fubini 232

CAP. X. Spaţiul L^p 236

§ 1. Inegalitatea lui Hölder şi inegalitatea lui Minkowski 236
§ 2. Spaţiul L^p 239

Redactor responsabil: Borşan Dorin
Tehnoredactor: Pruşan Tamara

Dat la cules: 23. 03. 67. Bun de tipar: 23. 02. 68. Apărut: 1968. Tiraj: 4000+130 leg 1/1 pegamoid. Hîrtie: scris tip I A 80 g/m², 16/70×100. Coli editoriale: 13,444. Coli de tipar: 15,5. A: 2359. C. Z. pentru bibliotecile mari: 517(075.8). C. Z. pentru bibliotecile mici: 51.

Întreprinderea Poligrafică Cluj, str. Brassai nr. 5—7.
Comanda nr. 148/1967.

Scanned with OKEN Scanner